Exercice

Cette étude porte sur l'utilisation principale des véhicules du parc automobile français.
Les réponses seront arrondies au dix-millième.

Partie A

Les véhicules de la région parisienne représentent 16% du parc automobile français en 2015.
22% des véhicules de la région parisienne sont utilisés principalement pour le trajet entre le domicile et le travail, 34% pour les loisirs.
En province, 49% des véhicules sont utilisés principalement pour le trajet entre le domicile et le travail, 31% pour les loisirs.
On choisit un véhicule au hasard dans le parc automobile français.

On note :

- R l'événement : "le véhicule provient de la région parisienne",
- $\overline{R}$ l'événement : "le véhicule provient de la province",
- T l'événement : "le véhicule est utilisé principalement pour le trajet entre le domicile et le travail",
- L l'événement : "le véhicule est utilisé principalement pour les loisirs",
- F l'événement : "le véhicule est utilisé principalement pour d'autres fonctions que le travail ou les loisirs".

On rappelle que, si A et B sont deux événements, $p(A)$ désigne la probabilité de l'événement A et $p_B(A)$ désigne la probabilité de l'événement A sachant que l'événement B est réalisé.

1. Représenter la situation par un arbre de probabilité.

2. Montrer que la probabilité qu'un véhicule soit utilisé principalement pour le trajet entre le domicile et le travail est égale à $0,446\ 8$.

3. Madame Dupont et Monsieur Durand ont une conversation sur l'utilisation de leur véhicule. Madame Dupont dit utiliser principalement sa voiture pour les loisirs, Monsieur Durand principalement pour le trajet entre le domicile et le travail.

Partie B

On sélectionne un échantillon aléatoire de 10 véhicules du parc automobile français. On note X la variable aléatoire qui compte, dans cet échantillon, le nombre de véhicules utilisés principalement pour le trajet entre le domicile et le travail.

1. Préciser la loi de probabilité de X ainsi que ses paramètres.

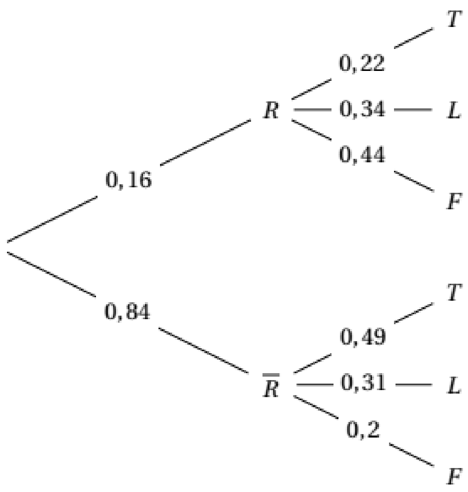
2. Déterminer la probabilité qu'exactement deux véhicules soient utilisés principalement pour le trajet entre le domicile et le travail.

3. Déterminer la probabilité qu'au moins un véhicule soit utilisé principalement pour le trajet entre le domicile et le travail.

Correction

Partie A

1. On obtient l'arbre de probabilité suivant :



2. D'après la formule des probabilités totales on a :
$$\begin{aligned} p(T) &= p(R \cap T) + p\left(\overline{R} \cap T\right) \\ &= 0,16 \times 0,22 + 0,84 \times 0,49 \\ &= 0,446\,8 \end{aligned}$$

3. On calcule dans un premier temps, à l'aide de la formule des probabilités totales :
$$\begin{aligned} p(L) &= p(R \cap L) + p\left(\overline{R} \cap L\right) \\ &= 0,16 \times 0,34 + 0,84 \times 0,31 \\ &= 0,314\,8 \end{aligned}$$
Ainsi $p_L(R) = \dfrac{p(R \cap L)}{p(L)} = \dfrac{0,16 \times 0,34}{0,314\,8} \approx 0,172\,8$
et $p_T(R) = \dfrac{R \cap T)}{p(T)} = \dfrac{0,16 \times 0,22}{0,446\,8} \approx 0,078\,8$
Ainsi Madame Dupont a la plus grande probabilité d'habiter la région parisienne.

Partie B

1. Le nombre de véhicule du parc automobile français est suffisamment grand pour qu'on puisse assimiler le tirage à un tirage aléatoire avec remise.
Les 10 tirages sont également indépendants et possède chacun 2 issues : T et $\overline{T}$
Ainsi la variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,446\,8$.

2. $P(X = 2) = \dbinom{10}{2} \times 0,446\,8^2 \times (1 - 0,446\,8)^8 \approx 0,078\,8$

3. On veut calculer :
$$\begin{aligned} P(X \geqslant 1) &= 1 - P(X = 0) \\ &= 1 - (1 - 0,446\,8)^{10} \\ &\approx 0,997\,3 \end{aligned}$$