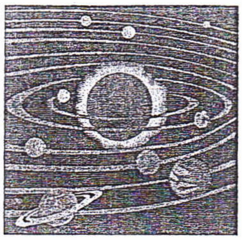
Corrigé de la fiche n°4 :

Les Puissances à Exposants Entiers



C1 : Expliciter les savoirs et les procédures

1. Montre que ces égalités sont vraies et justifie chaque étape en choisissant parmi les 5 règles suivantes :

(a) Définition d'un puissance entière – (b) Produit de puissances d'un même nombre – (c) Puissance d'une puissance – (d) Puissance d'un produit – (e) Quotient de puissances d'un même nombre

- $(a^{-3}\,b)^{-1} = \frac{a^3}{b}$

$(a^{-3}\,b)^{-1} = (a^{-3})^{-1}\,b^{-1}$ car puissance d'un produit : $(ab)^m = a^m b^m$

$= a^3\,b^{-1}$ car puissance d'une puissance : $(a^m)^n = a^{m.n}$

$= \frac{a^3}{b}$ car définition d'une puissance entière : $a^{-1} = \frac{1}{a}$

- $\frac{a^{-2}}{ab^{-1}} = \frac{b}{a^3}$

$\frac{a^{-2}}{ab^{-1}} = \frac{a^{-3}}{b^{-1}}$ car quotient de puissances d'un même nombre : $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

$= \frac{b}{a^3}$ car définition d'une puissance entière : $a^{-1} = \frac{1}{a}$

---

2. Situe les nombres suivants en notant la zone à laquelle ils appartiennent : A, B, C ou D

zone A | -1 | zone B | 0 | zone C | 1 | zone D

a) $2^{-1} = \frac{1}{2}$ zone C	d) $(-0{,}25)^{-1} = -4$ zone A	g) $(0{,}75)^{-1} = \frac{4}{3}$ zone D	j) $\pi^{-1} \approx 0{,}32$ zone C
b) $(-2)^{-1} = \frac{-1}{2}$ zone B	e) $(3^{-1})^{-1} = 3$ zone D	h) $(0{,}25)^{-1} = 4$ zone D	k) $-5^{-1} = \frac{-1}{5}$ zone B
c) $25^{-1} = \frac{1}{25}$ zone C	f) $-(-4)^{-1} = \frac{1}{4}$ zone C	i) $-(-0{,}5)^{-1} = 2$ zone D	l) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$ zone D

C2 : Appliquer les savoirs et les procédures

3. Calcule :

a) $3^{-2} = \frac{1}{9}$	d) $5^{-4} = \frac{1}{625}$	g) $12^{-1} = \frac{1}{12}$	k) $\left(\frac{1}{9}\right)^{-1} = 9$	n) $\left(\frac{-2}{3}\right)^{-4} = \frac{81}{16}$
b) $\left(\frac{1}{7}\right)^{-2} = 49$	e) $(-4)^{-3} = \frac{-1}{64}$	h) $-5 \,.\, 2^{-5} = \frac{-5}{32}$	l) $(-2^{-2})^{-3} = 64$	o) $(0{,}02)^{-3} = 125\,000$
c) $5^{-1} \,.\, 5 = 1$	f) $10^{-4} \,.\, 0{,}01 \,.\, 10^{6} = 1$	i) $\left(\frac{-3}{5}\right)^{-3} = \frac{-125}{27}$	m) $\frac{2^{-6}\,.\,3^{7}}{2^{-5}\,.\,3^{9}} = 2^{-1}.\ 3^{-2} = \frac{1}{18}$	p) $\frac{5^{-2}}{2^{-5}} = \frac{32}{25}$

---

4. Réduis les expressions en utilisant que des exposants positifs dans la réponse finale :

a) $a^{-3} = \frac{1}{a^3}$	b) $a^{-3}b^5 = \frac{b^5}{a^3}$	c) $4a^{-2}b^5 = \frac{4b^5}{a^2}$	d) $ab^{-1}c^3 = \frac{ac^3}{b}$	e) $\frac{a^3}{b^{-2}} = a^3b^2$	f) $\frac{x^{-2}}{y^{-3}} = \frac{y^3}{x^2}$
g) $a^{-3} \,.\, a^5 = a^2$	h) $x^{-5} \,.\, x^{-3} = x^{-8} = \frac{1}{x^8}$	i) $a^{-8} \,.\, a^3 = a^{-5} = \frac{1}{a^5}$	j) $a^5 \,.\, a^{-6} = a^{-1} = \frac{1}{a}$	k) $x^{-4} \,.\, x^4 = x^0 = 1$	l) $(3a^{-2})^2 = 9a^{-4} = \frac{9}{a^4}$

m) $(5x^{-1})^{-3} = 5^{-3}x^3 = \frac{x^3}{125}$ | n) $(2a^{-3}b^2)^3 = 2^3a^{-9}b^6 = \frac{8b^6}{a^9}$ | o) $(4a^2b^{-4})^{-2} = 4^{-2}a^{-4}b^8 = \frac{b^8}{16a^4}$ | p) $(-3a^2)^{-2} = 3^{-2}a^{-4} = \frac{1}{9a^4}$

q) $\left(\frac{a^{-3}}{b^7}\right)^{-2} = \frac{a^6}{b^{-14}} = a^6b^{14}$ | r) $\frac{(a^{-3}b^4)^{-2}}{(a^4b^5)^2} = \frac{a^6b^{-8}}{a^8\,b^{10}} = a^{-2}b^{-18} = \frac{1}{a^2b^{18}}$ | s) $-(-x^5)^{-2} = -x^{-10} = \frac{-1}{x^{10}}$ | t) $\frac{5a^{-5}}{4a^{-4}} = \frac{5}{4}a^{-1} = \frac{5}{4a}$

u) $(-3\,x\,y^{-4})^{-1} = -3^{-1}x^{-1}y^4 = \frac{-y^4}{3x}$ | v) $\frac{(-3a^2b^5)^{-1}}{(2a^{-4}b^3)^{-2}} = \frac{-3^{-1}a^{-2}b^{-5}}{2^{-2}a^8b^{-6}} = \frac{-4}{3}a^{-10}b = \frac{-4b}{3a^{10}}$

---

5. Ecris les expressions suivantes en utilisant :

1) le produit d'un entier le plus petit possible par une puissance de 10
2) la notation scientifique

a) $0{,}000\,12 \,.\, 300 = 12 \,.\, 10^{-5} \,.\, 3 \,.\, 10^2 = 36 \,.\, 10^{-3} = 3{,}6 \,.\, 10^{-2}$

b) $0{,}000\,03 \,.\, 0{,}000\,1 = 3 \,.\, 10^{-5} \,.\, 1 \,.\, 10^{-4} = 3 \,.\, 10^{-9}$

c) $(0{,}000\,4)^2 = (4 \,.\, 10^{-4})^2 = 16 \,.\, 10^{-8} = 1{,}6 \,.\, 10^{-7}$

d) $(-300)^4 = (-3 \,.\, 10^2)^4 = 81 \,.\, 10^8 = 8{,}1 \,.\, 10^9$

e) $(0{,}000\,005)^2 = (5 \,.\, 10^{-6})^2 = 25 \,.\, 10^{-12} = 2{,}5 \,.\, 10^{-11}$

f) $(-0{,}2)^3 \,.\, (0{,}003)^2 = (-2 \,.\, 10^{-1})^3 \,.\, (3 \,.\, 10^{-3})^2 = -8 \,.\, 10^{-3} \,.\, 9 \,.\, 10^{-6} = -72 \,.\, 10^{-9} = -7{,}2 \,.\, 10^{-8}$

---

6. Détermine l'ordre de grandeur du résultat des calculs suivants :

a) $10\,115\,867\,000 \,.\, 15\,837\,654\,000 \approx 10\,000\,000\,000 \,.\, 15\,000\,000\,000 \approx 10^{10} \,.\, 15 \,.\, 10^9 \approx 15 \,.\, 10^{19} \approx 1{,}5 \,.\, 10^{20}$

b) $0{,}005\,491 \,.\, 1567{,}8 \approx 0{,}005 \,.\, 1500 \approx 5 \,.\, 10^{-3} \,.\, 15 \,.\, 10^2 \approx 75 \,.\, 10^{-1} \approx 7{,}5$

c) $\frac{0{,}049 \,.\, 58{,}645}{22\,010} \approx \frac{0{,}05 \,.\, 60}{20\,000} \approx \frac{5 \,.\, 10^{-2} \,.\, 6 \,.\, 10}{2 \,.\, 10^4} \approx 15 \,.\, 10^{-5} \approx 1{,}5 \,.\, 10^{-4}$

C3 : Résoudre un problème

7. L'Erika, un pétrolier, s'est échoué le 12 décembre 1999 au large de la Bretagne en laissant s'échapper 37 000 tonnes de pétrole brut dans la mer. Si ce pétrole s'était étalé uniformément à la surface de l'eau en formant une couche de 3 mm d'épaisseur, quelle aurait été, en km², l'aire de la nappe de pétrole ainsi formée ?

La masse volumique du pétrole est de 800g/m³

masse de pétrole dans la mer = 37 000 tonnes = $37 \,.\, 10^9$ g

volume de pétrole dans la mer = $\frac{37 \,.\, 10^9}{8 \,.\, 10^2} = 4{,}625 \,.\, 10^7$ m³ $= 4{,}625 \,.\, 10^{-2}$ km³

épaisseur de la couche de pétrole = 3 mm = $3 \,.\, 10^{-6}$ km

aire de la nappe = $\frac{4{,}625 \,.\, 10^{-2}}{3 \,.\, 10^{-6}} \approx 1{,}54 \,.\, 10^4$ km² ≈ 15 400 km²

8. a) En un an, la lumière parcourt environ $9,46 . 10^{12}$ km. Cette distance est une unité de longueur qui s'appelle une année-lumière. Le diamètre de la Voie Lactée, notre galaxie, est de 100 000 années-lumière.

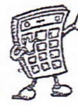
Convertis ce diamètre en km et utilise la notation scientifique.

Diamètre de la Voie Lactée = 100 000 années-lumière = 10^5 années-lumière

$= 10^5 . 9,46 . 10^{12}$ km $=$ **$9,46 . 10^{17}$ km**

b) La galaxie d'Andromède est l'objet le plus lointain visible à l'œil nu ; elle se trouve à 2 300 000 années-lumière.

Evalue cette distance en km.



Distance de la galaxie d'Andromède à la Terre = 2 300 000 années-lumière = $2,3 . 10^6$ années-lumière

$= 2,3 . 10^6 . 9,46 . 10^{12}$ km $= 21,758 . 10^{18}$ km = **$2,1758 . 10^{19}$ km**

c) L'étoile la plus proche, Prima du Centaure, est à environ $4 . 10^{12}$ km de la Terre. Exprime cette distance en années-lumière.

Distance de Prima du Centaure à la Terre = $4 . 10^{12}$ km = $\frac{4 . 10^{12}}{9,46 . 10^{12}}$ année-lumière ≈ 0,42 année-lumière

≈ **$4,2 . 10^{-1}$ année-lumière**

d) La masse de la Terre est d'environ $5,97 . 10^{24}$ kg. Combien cela fait-il de tonnes ?

masse de la Terre ≈ $5,97 . 10^{24}$ kg ≈ **$5,97 . 10^{21}$ tonnes**

---

9. a) La masse d'un atome d'hydrogène est environ $1,67 . 10^{-24}$ g. Celle d'un atome d'uranium est environ $3,95 . 10^{-22}$ g. Quel est le rapport entre la masse d'un atome d'uranium et celle d'un atome d'hydrogène ? Donne le résultats en notation scientifique

$$\frac{\text{masse d'unatome d'uranium}}{\text{masse d'unatome d'hydrogène}} = \frac{3,95 . 10^{-22}}{1,67 . 10^{-24}} \approx \mathbf{2,37 . 10^2}$$

b) Une mole de carbone pèse 12 g. Elle est composée de $6,02 . 10^{23}$ atomes. Quelle est la masse d'un atome de carbone ?

masse d'un atome de carbone = $\frac{12}{6,02 . 10^{23}}$ g ≈ **$2 . 10^{-23}$ g**