Fontaine-l'Évêque

A.R. L. Delattre

- Cours de Mathématiques -

Classe de 6A-6B de M. SMETS

Nom : ....

Prénom : ....

Classe : ....

Date : 16/03/2020

Géométrie de l'espace : Exercices corrigés

Exercice 1

Avec les points A (2,3,1), B (1,2,4), C (0,1,-6) et D (0,2,2) et les vecteurs $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$:

a. Calcule les composantes des vecteurs suivants :

$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ $\quad \overrightarrow{AB}\ (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$ $\quad \overrightarrow{CD}\ (x_D - x_C, y_D - y_C, z_D - z_C)$

$\vec{u}$ $\quad (1-2, 2-3, 4,1)$

$(-1, -1, 3)$

$\vec{v}$ $\quad (0, 1, 8)$

$\vec{u} + \vec{v}$ $\quad (-1, 0, 11)$

$3\vec{u} - 4\vec{v}$ $\quad 3.(-1,-1,3) - 4(0,1,8)$

$(-3,-3,9) - (0,4,32)$

$(-3-0, -3-4, 9-32)$ $\Rightarrow (-3,-7,-23)$

$-\frac{1}{3}\vec{u} + 2\vec{v}$ $\quad -\frac{1}{3}(-1,-1,3) + 2(0,1,8)$

$\left(\frac{1}{3}+0, \frac{1}{3}+2, -1+16\right)$

$\left(\frac{1}{3}, \frac{7}{3}, 15\right)$

b. Calcule les coordonnées du point M tel que $\overrightarrow{BM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

$M(x_M, y_M, z_M)$ coordonnées du point B

$\overrightarrow{BM}\ (x_M - 1, y_M - 2, z_M - 4)$

$\overrightarrow{AC}\ (0-2, 1-3, -6-1) \quad (-2, -2, -7)$

$\overrightarrow{BM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} \qquad (x_M - 1, y_M - 2, z_M - 4) = \frac{3}{4}(-2, -2, -7)$

$$\begin{cases} x_M - 1 = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2} \\ y_M - 2 = -\frac{3}{2} \\ z_M - 4 = -\frac{21}{4} \end{cases} \iff \begin{cases} x_M = -\frac{3}{2} + 1 \\ y_M = -\frac{3}{2} + 2 \\ z_M = -\frac{21}{4} + 4 \end{cases} \iff \begin{cases} x_M = -\frac{1}{2} \\ y_M = \frac{1}{2} \\ z_M = -\frac{5}{4} \end{cases} \qquad M\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{5}{4}\right)$$

Exercice 2

On considère la droite d passant par les deux points $A(2,3,6)$ et $B(-4,2,0)$.

a. Donne l'équation vectorielle de d,

$\overrightarrow{AX} = k . \overrightarrow{AB}$ (voir théorie cours)

b. donne les équations paramétriques de d,

$$\begin{cases} x = k.(x_B - x_A) + x_A \\ y = k.(y_B - y_A) + y_A \\ z = k.(z_B - z_A) + z_A \end{cases} \iff \begin{cases} x = k.(-6) + 2 \\ y = k.(-1) + 3 \\ z = k(-6) + 6 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -6k + 2 \\ y = -k + 3 \\ z = -6k + 6 \end{cases}$$

c. donne l'expression générale de tout point de la droite d. Autrement dit, exprime à l'aide d'un paramètre réel k les coordonnées de tout point X de la droite d,

$X\ (-6k + 2, -k + 3, -6k + 6)$

d. donne deux autres points de la droite d,

On choisit 2 valeurs de k au hasard

$k=1$ $\quad X(-6.1+2,\ -1+3,\ -6.1+6)$ $\quad X(-4,2,0)$

$k=0$ $\quad X(2,3,6)$

e. indique si le point (-1 ; 2,5 ; 3) appartient à la droite d.

$$\begin{cases} -1 = -6k+2 \\ 2{,}5 = -k+3 \\ 3 = -6k+6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6k = 2+1 \\ k = 3-2{,}5 \\ 6k = 6-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{1}{2} \\ k = \frac{1}{2} \\ k = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ il existe une seule valeur de k qui vérifie les 3 équations

$\Rightarrow$ le point (-1 ; 2,5 ; 3) appartient à la droite d

Exercice 3

Soit la droite d de vecteur directeur $\vec{u}$ (2,6,2) passant par le point A(2,4,1).

a. Donne les équations paramétriques de d,

$$\begin{cases} x - x_A = \alpha\, x_u \\ y - y_A = \alpha\, y_u \\ z - z_A = \alpha\, z_u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = \alpha . 2 \\ y - 4 = \alpha . 6 \\ z - 1 = \alpha . 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\alpha + 2 \\ y = 6\alpha + 4 \\ z = 2\alpha + 1 \end{cases}$$

$\rightarrow$ ce sont les équations paramétriques de la droite d

b. Indique si le point $B(6,12,-4)$ est un point de d.

$$\begin{cases} 6 = 2\alpha+2 \\ 12 = 6\alpha+4 \\ -4 = 2\alpha+1 \end{cases} \iff \begin{cases} 2\alpha = 4 \\ 6\alpha = 8 \\ 2\alpha = -5 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = 2 \\ \alpha = \frac{4}{3} \\ \alpha = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Il n'existe pas une seule valeur de α qui vérifie les 3 équations, donc le point B n'appartient pas à la droite