1) Limite en un réel

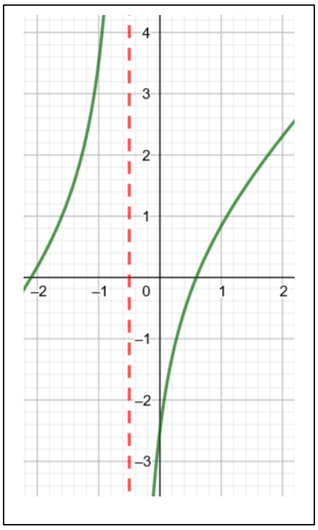
1ère règle dans ces limites : on remplace x par la valeur vers laquelle il tend pour voir la méthode à utiliser

- **Exemple a : cas c/0**

$$\lim_{x\to -0,5} \frac{4x^2+6x-5}{4x+2} = \frac{4.(-0,5)^2+6.(-0,5)-3}{4.(-0,5)+2} = \frac{-5}{0} = \infty$$

Pour déterminer le signe de l'infini, on utilise le ***tableau de signe du dénominateur***.

x	On veut $-0,5^-$ On remplace par une valeur légèrement inférieure à -0,5 Par exemple : -1	-0,5	On veut $-0,5^+$ On remplace par une valeur légèrement supérieure à -0,5 Par exemple : 0
4x+2	On regarde le signe du résultat 4.(-1)+2 = -2 négatif -	0	On regarde le signe du résultat 4.(2)+2 = 10 positif +



On a donc deux limites, à gauche $-0,5^-$, et à droite $-0,5^+$

$$\lim_{x\to -0,5^-} \frac{4x^2+6x-5}{4x+2} = \frac{-5}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x\to -0,5^+} \frac{4x^2+6x-5}{4x+2} = \frac{-5}{0^+} = -\infty$$

Graphiquement, on a une asymptote verticale $AV \equiv x = -0,5$

- **Exemple b : cas 0/0**

$$\lim_{x\to -5} \frac{6x^2+18x-60}{-x^2-x+20} = \frac{6.(-5)^2+18.(-5)-60}{-(-5)^2-(-5)+20} = \frac{0}{0}$$

La technique ici consiste à utiliser la ***factorisation***.

1er degré	2nd degré	3ème degré
$ax+b = a(x-x_1)$	$ax^2+bx+c = \begin{cases} a(x-x_1)(x-x_2) & si\ \Delta > 0 \\ a(x-x_1)^2 & si\ \Delta = 0 \\ pas\ factorisable & si\ \Delta < 0 \end{cases}$	$ax^3+bx^2+cx+d = a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$ Avec éventuellement des racines identiques (par exemple $x_1 = x_2$)

On factorise séparément le numérateur et le dénominateur.

- Numérateur : $6x^2+18x-60$

$\Delta = 1764 \qquad x_1 = 2 \qquad et \qquad x_2 = -5$

Donc $6x^2+18x-60 = 6(x-2)\big(x-(-5)\big) = 6(x-2)(x+5)$

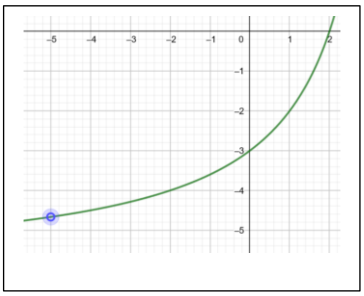
- Dénominateur : $-x^2-x+20$

$\Delta = 81 \qquad x_1 = -5 \qquad et \qquad x_2 = 4$

Donc $-x^2-x+20 = -1\big(x-(-5)\big)(x-4) = -(x+5)(x-4)$

- On regroupe et on simplifie :

$$f(x) = \frac{6x^2+18x-60}{-x^2-x+20} = \frac{6(x-2)(x+5)}{-(x+5)(x-4)} = \frac{6(x-2)}{-(x-4)} = \frac{6x-12}{-x+4}$$



- On remplace de nouveau x par la valeur vers laquelle il tend

$$\lim_{x\to -5} \frac{6x^2+18x-60}{-x^2-x+20} = \lim_{x\to -5} \frac{6x-12}{-x+4} = \frac{6.(-5)-12}{-(-5)+4} = \frac{-42}{9} \approx -4,67$$

- Graphiquement, la fonction est prolongeable par continuité (ppc) en rajoutant le point de coordonnées (-5 ;-4,67)

Attention : Si à l'étape d'avant, on a un nombre (ici c'était -4,67), c'est un ppc.
Si on obtient une expression du type c/0, on doit refaire la technique de l'exemple a.

2) Limite en l'infini

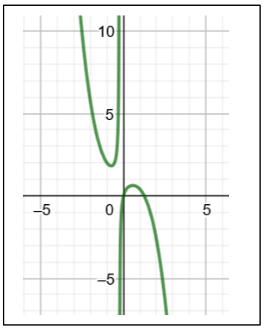
Pour les fonctions rationnelles, la limite en l'infini est le quotient des limites des termes de plus haut degré.

Notons n le degré du numérateur et d le degré du dénominateur.
3 cas (et même un cas spécial en plus, l'asymptote oblique):

a) n > d (pas d'interprétation sauf cas spécial)

Exemple : $\lim_{+\infty} \frac{4x-2x^4}{4x+1} = \lim_{+\infty} \frac{-2x^4}{4x} = \lim_{+\infty} -0{,}5x^3 = -\infty$

$$\lim_{-\infty} \frac{4x-2x^4}{4x+1} = \lim_{-\infty} \frac{-2x^4}{4x} = \lim_{-\infty} -0{,}5x^3 = +\infty$$



Cas spécial : n = d+1

Exemple :

- $\lim_{+\infty} \frac{6x^2-7}{3x+2} = \lim_{+\infty} 2x = +\infty$
- $\lim_{-\infty} \frac{6x^2-7}{3x+2} = \lim_{-\infty} 2x = -\infty$

Ici on a une AO d'équation y = mx + p avec mx = 2x.
Calcul de p :

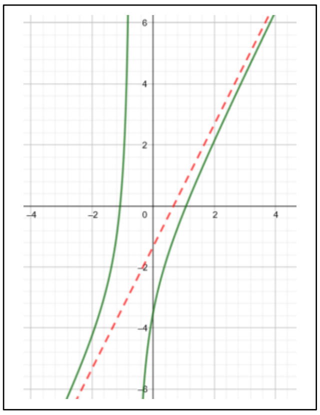
- On modifie et on simplifie l'expression *f(x) – mx*

$$f(x) - 2x = \frac{6x^2-7}{3x+2} - 2x = \frac{6x^2-7}{3x+2} - \frac{2x(3x+2)}{(3x+2)}$$
$$= \frac{6x^2-7-6x^2-4x}{3x+2} = \frac{-4x-7}{3x+2}$$

- On passe à la limite : $p = \lim_{\pm\infty} f(x) - mx$

$$p = \lim_{\pm\infty} \frac{-4x-7}{3x+2} = \lim_{\pm\infty} \frac{-4x}{3x} = \frac{-4}{3}$$

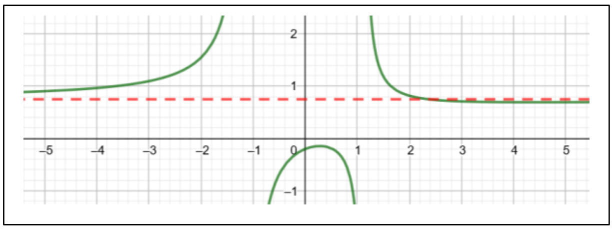
- Graphiquement : La fonction admet une $AO \equiv y = 2x - \frac{4}{3}$



b) n = d (asymptote horizontale)

Exemple :

- $\lim_{\pm\infty} \frac{3x^2-2x+1}{4x^2-5} = \lim_{\pm\infty} \frac{3x^2}{4x^2} = \frac{3}{4}$
- Graphiquement $AH \equiv y = \frac{3}{4}$



c) n < d (asymptote horizontale)

Exemple :

- $\lim_{\pm\infty} \frac{4x^7-5x+1}{1-3x^9} = \lim_{\pm\infty} \frac{4x^7}{-3x^9} = \lim_{\pm\infty} \frac{4}{-3x^2} = \frac{4}{-\infty} = 0$
- Graphiquement $AH \equiv y = 0$