Solutions sans développement.

I) Connaître. Traduire en termes de limites.

1) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in Dom\, f : |x - 1| < \delta \Rightarrow |f(x) - 2| < \varepsilon$ → $\lim_{x \to 1} f(x) = 2$

2) $\forall s > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in Dom\, f : |x - 3| < \delta \Rightarrow f(x) > s$ → $\lim_{x \to 3} f(x) = +\infty$

3) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in Dom\, f : |x + 4| < \delta \Rightarrow |f(x) - 5| < \varepsilon$ → $\lim_{x \to -4} f(x) = 5$

4) $\forall s < 0, \exists \delta > 0, \forall x \in Dom\, f : |x + 6| < \delta \Rightarrow f(x) < s$ → $\lim_{x \to -6} f(x) = -\infty$

II) Savoir-faire.
Pour les fonctions 1) à 4) suivantes, déterminer son domaine et les limites au bord du domaine (ne pas oublier les interprétations graphiques).
Pour les fonctions 5) et 6), déterminer uniquement les limites en l'infini avec interprétations graphiques.

1) $f(x) = \frac{8x^3 - 64x^2 + 88x + 160}{2x^2 - 14x + 24}$ → $Dom\, f = \mathbb{R} \backslash \{3; 4\}$

$\lim_{x \to 3^-} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \to 3^+} f(x) = -\infty$ $AV \equiv x = 3$

$\lim_{x \to 4} f(x) = -10$ ppc en rajoutant (4 ;-10)

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ $AO \equiv y = 4x - 4$

2) $f(x) = \frac{6x^2 - 18x - 60}{2x^2 + 8x + 8}$ → $Dom\, f = \mathbb{R} \backslash \{-2\}$

$\lim_{x \to -2^-} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \to -2^+} f(x) = -\infty$ $AV \equiv x = -2$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 3$ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 3$ $AH \equiv y = 3$

3) $f(x) = \frac{-2x^2 - 2x + 24}{x^2 - 6x + 9}$ → $Dom\, f = \mathbb{R} \backslash \{3\}$

$\lim_{x \to 3^-} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \to 3^+} f(x) = -\infty$ $AV \equiv x = 3$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -2$ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -2$ $AH \equiv y = -2$

4) $f(x) = \frac{6x^3 - 54x^2 + 120x - 72}{3x^2 + 12x - 15}$ → $Dom\, f = \mathbb{R} \backslash \{-5; 1\}$

$\lim_{x \to -5^-} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \to -5^+} f(x) = +\infty$ $AV \equiv x = -5$

$\lim_{x \to 1} f(x) = \frac{5}{3}$ ppc en rajoutant (1 ; $\frac{5}{3}$)

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ $AO \equiv y = 2x - 26$

5) $f(x) = \frac{2x^2 - 32}{8x^3 + 64}$ → $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$ $AH \equiv y = 0$

6) $f(x) = \frac{6x + 12}{3x^3 + 81}$ → $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$ $AH \equiv y = 0$

III) Compétences

1) Construire une fonction admettant une asymptote verticale en x = 1, un ppc en x = 2 et une asymptote horizontale.
   ➔ Par exemple : $f(x) = \frac{(x-3)(x-2)}{(x-1)(x-2)}$

2) Construire une fonction admettant une asymptote verticale en x = 3 et une asymptote oblique.
   ➔ Par exemple : $f(x) = \frac{(x-4)(x-5)}{(x-3)}$

3) Soit $a \in \mathbb{R}$ un paramètre. Déterminer, en fonction de a la limite suivante :

$$\lim_{x \to a} \frac{x^2 - a^2}{x - a}$$

   ➔ $\lim_{x \to a} \frac{x^2-a^2}{x-a} = \lim_{x \to a} \frac{(x-a)(x+a)}{(x-a)} = \lim_{x \to a} x + a = 2a$