0) Rappel : Equations (en vue de déterminer un domaine)

- **Exemple a (équation du premier degré) :**

$-4x + 7 = 0$ $7 = 4x$ $\frac{7}{4} = x$ $ou\ x = 1{,}75$	Mettre les x d'un côté de l'égalité et les nombres de l'autre côté. Ici, le coefficient devant x est négatif (-4), j'ajoute donc 4x de chaque côté pour avoir un coefficient positif devant x.
$3x + 6 = 0$ $3x = -6$ $x = \frac{-6}{3} = -2$	Ici le coefficient devant x est positif (3), je laisse mes x à gauche. Je retire 6 de chaque côté pour avoir les x tout seuls à gauche.

- **Exemple b (équation du second degré) :**

$-2x - x^2 = -8$ $-x^2 - 2x + 8 = 0$ a = -1 b = -2 et c = 8 $\Delta = (-2)^2 - 4.(-1).8$ $\Delta = 36$ $x_1 = \frac{-(-2) + \sqrt{36}}{2(-1)} = -4$ $x_2 = \frac{-(-2) - \sqrt{36}}{2(-1)} = 2$	Avec des x^2, on utilise la méthode du discriminant Δ **MAIS** il faut d'abord tout placer d'un côté de l'égalité et ordonner (forme $ax^2+bx+c=0$) $\Delta = b^2 - 4ac$ Les solutions sont, si elles existent : $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

Exercice 0 : Résoudre les équations suivantes

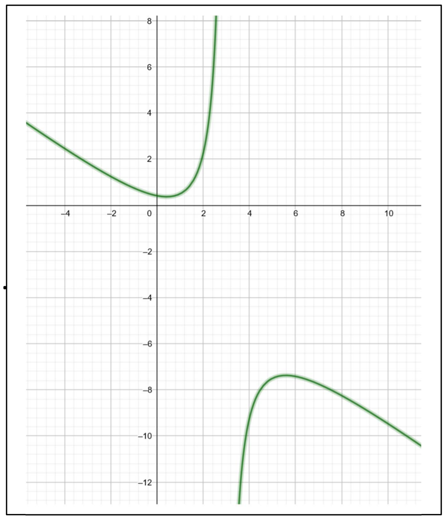
a) $3x + 21 = 0$
b) $4x^2 - 5x + 1 = 0$
c) $-2x + 4 = 0$
d) $x^2 + x = 20$
e) $6 - 5x = 0$
f) $-x^2 - x + 12 = 0$
g) $4x - 20 = 0$
h) $4x^2 - 16 = 0$

Solutions :

a) -7 b) 1 et 0,25 c) 2 d) 4 et -5

e) 1,2 f) 3 et -4 g) 5 h) 2 et -2

1) Domaines et limites à déterminer



- **Exemple a**: Soit $f(x) = \frac{3x^2-4x+5}{-4x+12}$

Rappelons que l'expression f(x) n'existe que si son dénominateur

est non-nul (on ne peut diviser par 0)

- ➢ CE : $-4x + 12 \neq 0$ qui se résout comme pour une équation.

$12 \neq 4x$ et donc $\frac{12}{4} \neq x$ soit $x \neq 3$

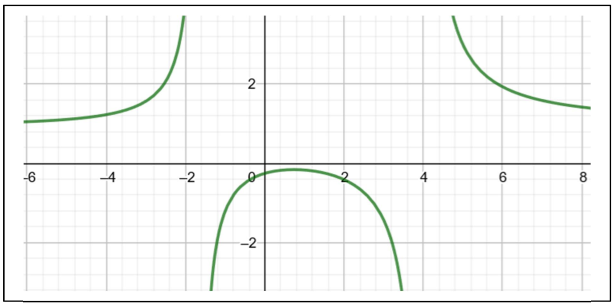
Ainsi le domaine (ensemble des x pour lesquels f(x) existe) est

$Dom\, f = \mathbb{R}\backslash\{3\}$ ou encore $Dom\, f =]-\infty; 3[\cup]3; +\infty[$

- ➢ Les limites à calculer au bord du domaine seront donc

$\lim\limits_{x\to 3} \frac{3x^2-4x+5}{-4x+12}$ $\qquad \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{3x^2-4x+5}{-4x+12}$ $\qquad et \qquad \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{3x^2-4x+5}{-4x+12}$

Il y aura une limite en un réel (voir partie 2) et deux limites en l'infini (voir partie 3).



- **Exemple b**: Soit $f(x) = \frac{3x^2-4x+5}{3x^2-7x-20}$

- ➢ CE : $3x^2 - 7x - 20 \neq 0$

$\Delta = (-7)^2 - 4.3.(-20) = 289$

$x_1 = \frac{-(-7)+\sqrt{289}}{2.3} = 4$ et $x_2 = \frac{-(-7)-\sqrt{289}}{2.3} = \frac{-10}{6} = -\frac{5}{3}$

$Dom\, f = \mathbb{R}\backslash\{-\frac{5}{3}; 4\}$ ou encore $Dom\, f =]-\infty; -\frac{5}{3}[\cup]-\frac{5}{3}; 4[\cup]4; +\infty[$

- ➢ Les limites à calculer :

$\lim\limits_{x\to -\frac{5}{3}} \frac{3x^2-4x+5}{3x^2-7x-20}$ $\qquad \lim\limits_{x\to 4} \frac{3x^2-4x+5}{3x^2-7x-20}$ $\qquad \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{3x^2-4x+5}{3x^2-7x-20}$ $\qquad et \qquad \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{3x^2-4x+5}{3x^2-7x-20}$

2 limites en un réel et deux limites en l'infini.

Exercice 1 : Déterminer les domaines des fonctions suivantes et les limites qu'il faudra déterminer

a) $f(x) = \frac{4x^2-x+7}{2x+3}$ $\qquad$ b) $f(x) = \frac{4}{2x^2-3x-2}$

c) $f(x) = \frac{-5x}{-3x^2+3x+18}$ $\qquad$ d) $f(x) = \frac{2x+6}{-5x-2}$

Solutions :

a) $Dom\, f = \mathbb{R}\backslash\{-1{,}5\}$ $\qquad \lim\limits_{x\to -1,5} f(x)$ $\qquad \lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ $\qquad \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

b) $Dom\, f = \mathbb{R}\backslash\{-0{,}5; 2\}$ $\qquad \lim\limits_{x\to -0,5} f(x)$ $\qquad \lim\limits_{x\to 2} f(x)$ $\qquad \lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ $\qquad \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

c) $Dom\, f = \mathbb{R}\backslash\{-2; 3\}$ $\qquad \lim\limits_{x\to -2} f(x)$ $\qquad \lim\limits_{x\to 3} f(x)$ $\qquad \lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ $\qquad \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

d) $Dom\, f = \mathbb{R}\backslash\{-0{,}4\}$ $\qquad \lim\limits_{x\to -0,4} f(x)$ $\qquad \lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ $\qquad \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

2) Limite en un réel

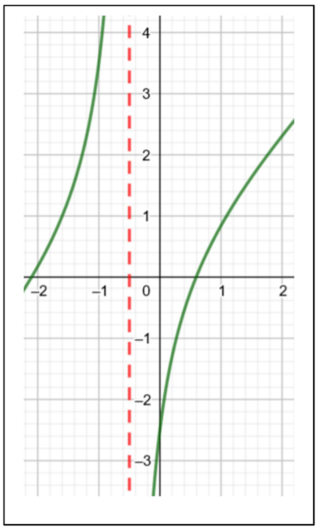
1ère règle dans ces limites : on remplace x par la valeur vers laquelle il tend pour voir la méthode à utiliser

- **Exemple a : cas c/0**

$$\lim_{x\to -0{,}5} \frac{4x^2+6x-5}{4x+2} = \frac{4.(-0{,}5)^2+6.(-0{,}5)-3}{4.(-0{,}5)+2} = \frac{-5}{0} = \infty$$

Pour déterminer le signe de l'infini, on utilise le ***tableau de signe du dénominateur.***

x	On veut $-0{,}5^-$ On remplace par une valeur légèrement inférieure à -0,5 Par exemple : -1	-0,5	On veut $-0{,}5^+$ On remplace par une valeur légèrement supérieure à -0,5 Par exemple : 0
4x+2	On regarde le signe du résultat 4.(-1)+2 = -2 négatif -	0	On regarde le signe du résultat 4.(2)+2 = 10 positif +



On a donc deux limites, à gauche $-0{,}5^-$, et à droite $-0{,}5^+$

$$\lim_{x\to -0{,}5^-} \frac{4x^2+6x-5}{4x+2} = \frac{-5}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x\to -0{,}5^+} \frac{4x^2+6x-5}{4x+2} = \frac{-5}{0^+} = -\infty$$

Graphiquement, on a une asymptote verticale AV d'équation x = -0,5

- **Exemple b : cas 0/0**

$$\lim_{x\to -5} \frac{6x^2+18x-60}{-x^2-x+20} = \frac{6.(-5)^2+18.(-5)-60}{-(-5)^2-(-5)+20} = \frac{0}{0}$$

La technique ici consiste à utiliser la ***factorisation***.

Si un polynôme du second degré ax²+bx+c possède deux racines x_1 et x_2, on peut l'écrire :

$$\boldsymbol{ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)}$$

On factorise séparément le numérateur et le dénominateur.

➢ Numérateur : 6x²+18x-60

$$\Delta = 18^2 - 4.6.(-60) = 1764$$

$$x_1 = \frac{-18+\sqrt{1764}}{2.6} = 2 \qquad et \qquad x_2 = \frac{-18-\sqrt{1764}}{2.6} = -5$$

Donc $6x^2+18x-60 = 6(x-2)\big(x-(-5)\big) = 6(x-2)(x+5)$

➢ Dénominateur : $-x^2-x+20$

$\Delta = 81 \qquad x_1 = -5 \qquad et \qquad x_2 = 4$

Donc $-x^2-x+20 = -1\big(x-(-5)\big)(x-4) = -(x+5)(x-4)$

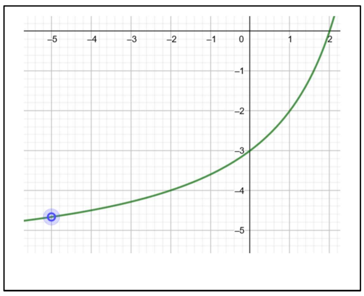
➢ On regroupe et on simplifie :

$$f(x) = \frac{6x^2+18x-60}{-x^2-x+20} = \frac{6(x-2)(x+5)}{-(x+5)(x-4)} = \frac{6(x-2)}{-(x-4)} = \frac{6x-12}{-x+4}$$

➢ On remplace de nouveau x par la valeur vers laquelle il tend

$$\lim_{x\to -5} \frac{6x^2+18x-60}{-x^2-x+20} = \lim_{x\to -5} \frac{6x-12}{-x+4} = \frac{6.(-5)-12}{-(-5)+4} = \frac{-42}{9} \approx -4{,}67$$

➢ Graphiquement, la fonction est prolongeable par continuité (ppc) en rajoutant le point de coordonnées (-5 ;-4,67)



Exercice 2 : Déterminer les limites des fonctions suivantes et interpréter graphiquement

a) $\lim_{x\to 5} \frac{-x^2+x+20}{2x^2-8x-10}$ puis $\lim_{x\to -1} \frac{-x^2+x+20}{2x^2-8x-1}$

b) $\lim_{x\to -2} \frac{x^2+3x-1}{-2x-4}$

Exercice 2 bis : même exercice que le précédent mais avant vous devez trouver les limites à déterminer (voir exercice 1)

a) $f(x) = \frac{6x^2-6x-36}{3x-6}$

b) $f(x) = \frac{6x^2-6x-36}{3x^2-12x+9}$

Solutions :

Exercice 2

a) 1ere limite : $\lim_{x\to 5} \frac{-x^2+x+20}{2x^2-8x-10} = -0{,}75$ ppc en rajoutant le point (5 ;-0,75)

2ème limite : $\lim_{x\to -1^-} \frac{-x^2+x+20}{2x^2-8x-1} = +\infty$ et $\lim_{x\to -1^+} \frac{-x^2+x+20}{2x^2-8x-1} = -\infty$ AV $\equiv x = -1$

b) $\lim_{x\to -2^-} \frac{x^2+3x-1}{-2x-4} = -\infty$ et $\lim_{x\to -2^+} \frac{x^2+3x-1}{-2x-4} = +\infty$ AV $\equiv x = -2$

Exercice 2 bis

a) Dom f = $\mathbb{R}\backslash\{2\}$

$\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{6x^2-6x-36}{3x-6} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 2^+} \frac{6x^2-6x-3}{3x-6} = -\infty$ AV$\equiv x = 2$

b) Dom f = $\mathbb{R}\backslash\{1; 3\}$

$\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{6x^2-6x-3}{3x^2-12x+} = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{6x^2-6x-36}{3x^2-12x+} = +\infty$ AV$\equiv x = 1$

$\lim\limits_{x\to 3} \frac{6x^2-6x-36}{3x^2-12x+} = 5$ ppc en rajoutant le point (3 ; 5)