Chapitre 3
Théorème de Pythagore et racines carrées

Compétences à développer

- Utiliser les caractéristiques d'une figure plane ou d'un solide dans une situation concrète.

Processus

Connaître

- Connaître le théorème de Pythagore et sa réciproque.

Appliquer

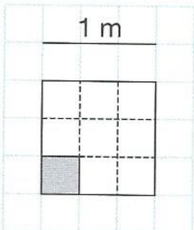
- Calculer une longueur en utilisant le théorème de Pythagore.
- Vérifier si un triangle est rectangle en utilisant la réciproque du théorème de Pythagore.

Activité 1 • Racines carrées

1 a) Trace trois carrés dont les aires valent respectivement 9 cm^2, 16 cm^2 et 20 cm^2.

b) Explique comment déterminer la longueur du côté de chaque carré.

2 Le grand carré représenté ci-dessous a une aire de 1 m^2.



a) Quelle est l'aire du carré grisé ?

b) Quelle est la longueur du côté du carré grisé ?

3 Détermine la longueur du côté d'un carré connaissant son aire.

Aire (m^2)	36	100	25	1600	250 000
Longueur du côté (m)					

Aire (m^2)	$\frac{9}{16}$	$\frac{1}{64}$	0,09	0,0036	1,44
Longueur du côté (m)					

4 a) Trouve deux nombres pour compléter la phrase ci-dessous.

36 est le carré de .... et de ....

Les nombres que tu as trouvés sont les **racines carrées** positive et négative de 36, notées respectivement $\sqrt{36}$ et $-\sqrt{36}$.

b) Calcule.

(1) $\sqrt{16}$ = ... $-\sqrt{16}$ = ... $\sqrt{\frac{1}{25}}$ = ... $-\sqrt{\frac{1}{25}}$ = ...

(2) $\sqrt{4900}$ = ... $-\sqrt{4900}$ = ... $\sqrt{0{,}04}$ = ... $-\sqrt{0{,}04}$ = ...

(3) $\sqrt{1}$ = ... $-\sqrt{1}$ = ... $\sqrt{0}$ = ... $-\sqrt{0}$ = ...

5 Trouve, si possible, deux nombres pour compléter la phrase ci-dessous.

–16 est le carré de ....

Quelle conclusion peux-tu tirer de cet exercice ?

....

Racines carrées

A. Définitions

La racine carrée positive d'un nombre positif a, notée $\sqrt{a}$, est le nombre positif x dont le carré vaut a.

a étant un nombre positif, $\sqrt{a} = x \Leftrightarrow x^2 = a$ et x est positif.

Exemples : $\sqrt{4} = 2$ car $2^2 = 4$ $\qquad \sqrt{6{,}25} = 2{,}5$ car $2{,}5^2 = 6{,}25$

$\sqrt{1} = 1$ car $1^2 = 1$ $\qquad \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$ car $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$

La racine carrée négative d'un nombre positif a, notée $-\sqrt{a}$, est le nombre négatif x dont le carré vaut a.

a étant un nombre positif, $-\sqrt{a} = x \Leftrightarrow x^2 = a$ et x est négatif.

Exemples : $-\sqrt{16} = -4$ car $(-4)^2 = 16$ $\qquad -\sqrt{1{,}44} = -1{,}2$ car $(-1{,}2)^2 = 1{,}44$

$-\sqrt{1} = 1$ car $(-1)^2 = 1$ $\qquad -\sqrt{\frac{1}{4}} = -\frac{1}{2}$ car $\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

B. Remarques

- Un nombre strictement négatif n'a pas de racine carrée réelle.

  Exemple : –16 n'a pas de racine carrée réelle car il n'existe pas de nombre réel a tel que $a^2 = -16$.

- Le nombre 0 n'admet qu'une seule racine carrée qui est 0.

- Dans l'expression $\sqrt{a}$, a est le radicand et $\sqrt{\ }$ est le radical.
- Le radical doit couvrir tout le radicand.

Exemple : écriture correcte $\sqrt{6561}$ — *écriture incorrecte* $\sqrt{65}61$

C. Calcul de racines carrées

Dans certains cas, la racine carrée d'un nombre est une valeur exacte.

Exemples : $\sqrt{9} = 3$ $\quad \sqrt{1{,}44} = 1{,}2$ $\quad \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$

Dans d'autres cas, il est impossible de donner la valeur exacte d'une racine carrée, on ne peut alors en donner qu'une valeur approchée.

Exemple : $\sqrt{20} \cong 4{,}47213...$

Premiers encadrements de $\sqrt{20}$

4	$<$	$\sqrt{20}$	$<$	5	car	4^2	$<$	20	$< 5^2$
$4{,}4$	$<$	$\sqrt{20}$	$<$	$4{,}5$	car	$4{,}4^2$	$<$	20	$< 4{,}5^2$
$4{,}47$	$<$	$\sqrt{20}$	$<$	$4{,}48$	car	$4{,}47^2$	$<$	20	$< 4{,}48^2$
$4{,}472$	$<$	$\sqrt{20}$	$<$	$4{,}473$	car	$4{,}472^2$	$<$	20	$< 4{,}473^2$

Utilisation de la calculatrice pour le calcul de racines carrées

Séquence à suivre : ....

....

....

6 Il est utile de connaître les quinze premiers carrés parfaits. Complète la liste ci-dessous.

.... $= 1^2$	.... $= 4^2$	.... $= 7^2$	.... $= 10^2$	.... $= 13^2$
.... $= 2^2$	.... $= 5^2$	.... $= 8^2$	.... $= 11^2$	.... $= 14^2$
.... $= 3^2$	.... $= 6^2$	.... $= 9^2$	.... $= 12^2$	.... $= 15^2$

En voici d'autres tout aussi utiles. Complète la liste ci-dessous.

.... $= 20^2$	.... $= 40^2$	.... $= 60^2$	.... $= 80^2$	.... $= 100^2$
.... $= 30^2$	.... $= 50^2$	.... $= 70^2$	.... $= 90^2$	.... $= 200^2$

Exercices

1 Calcule sans calculatrice.

$\sqrt{4}$ = ... $\sqrt{169}$ = ... $\sqrt{289}$ = ... $\sqrt{324}$ = ...

$\sqrt{144}$ = ... $\sqrt{-49}$ = ... $\sqrt{400}$ = ... $\sqrt{196}$ = ...

$\sqrt{225}$ = ... $\sqrt{121}$ = ... $\sqrt{-64}$ = ... $\sqrt{361}$ = ...

$\sqrt{\frac{1}{4}}$ = ... $\sqrt{\frac{4}{25}}$ = ... $\sqrt{0{,}01}$ = ... $\sqrt{0{,}64}$ = ...

$\sqrt{\frac{1}{25}}$ = ... $\sqrt{\frac{121}{100}}$ = ... $\sqrt{0{,}25}$ = ... $\sqrt{0{,}09}$ = ...

$\sqrt{8100}$ = ... $\sqrt{1\,000\,000}$ = ... $\sqrt{0{,}0169}$ = ...

$\sqrt{1600}$ = ... $\sqrt{900}$ = ... $\sqrt{\frac{144}{900}}$ = ...

$\sqrt{10\,000}$ = ... $\sqrt{-0{,}01}$ = ... $\sqrt{\frac{225}{400}}$ = ...

2 a) En utilisant ta calculatrice, détermine la valeur des racines carrées ci-dessous ainsi qu'un encadrement à l'unité près.

$\sqrt{17}$ = ... $\sqrt{58}$ = ... $\sqrt{10}$ = ...

.... $< \sqrt{17} <$ .... $< \sqrt{58} <$ .... $< \sqrt{10} <$ ....

b) Sans utiliser ta calculatrice, donne un encadrement à l'unité près des racines carrées ci-dessous.

.... $< \sqrt{21} <$ .... $< \sqrt{70} <$ .... $< \sqrt{5} <$ ....

.... $< \sqrt{38} <$ .... $< \sqrt{62} <$ .... $< \sqrt{118} <$ ....

3 a) Lorsqu'on introduit la séquence pour calculer $\sqrt{18}$, certaines calculatrices affichent $3\sqrt{2}$. Utilise la définition d'une racine carrée pour justifier cette simplification.

....

Écris ci-dessous les étapes de la simplification.

$\sqrt{18}$ = ...

b) Simplifie, si possible, les racines carrées ci-dessous.

$\sqrt{50}$ = ... $\sqrt{27}$ = ...

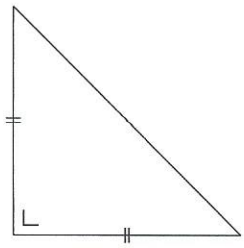
$\sqrt{500}$ = ... $\sqrt{30}$ = ...

Activité 2 • Théorème de Pythagore

1 Découverte d'une relation

a) Sur chaque côté du triangle rectangle isocèle ci-dessous, construis un carré extérieur au triangle.

b) Compare les aires des carrés. Pour t'aider, découpe les carrés en utilisant les diagonales.



....

....

....

....

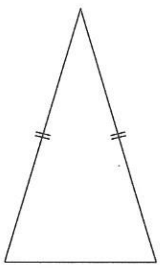
....

....

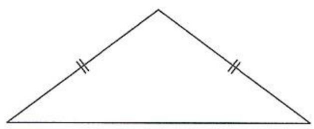
....

2 Vérifie si la relation trouvée est toujours vraie pour d'autres types de triangles.

Triangle isocèle acutangle

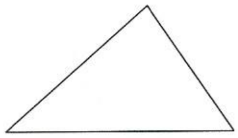


Triangle isocèle obtusangle

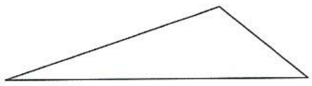


....

Triangle scalène acutangle



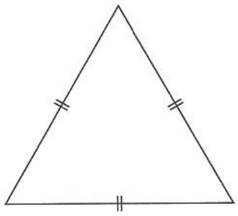
Triangle scalène obtusangle



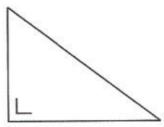
....

....

Triangle équilatéral



Triangle scalène rectangle



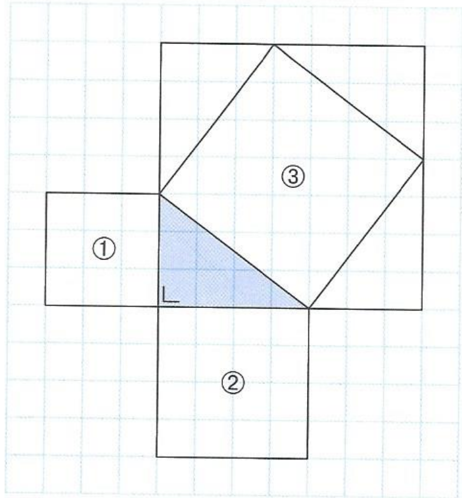
....

....

3 Quelle doit être la nature du triangle pour que la relation soit vérifiée ?

....

4 a) Détermine séparément l'aire de chaque carré construit sur les côtés du triangle rectangle en prenant comme unité d'aire le carré du quadrillage.



....

....

....

....

....

....

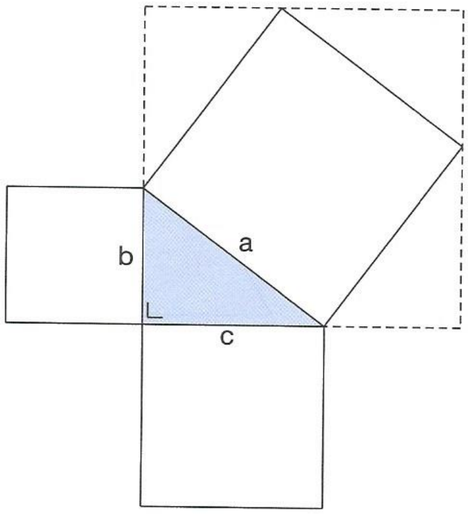
b) La relation trouvée précédemment est-elle vérifiée ? Justifie.

....

....

....

c) En t'aidant du dessin ci-contre, exprime l'aire du carré construit sur l'hypoténuse en fonction de b et de c.
Justifie ton raisonnement.



....

....

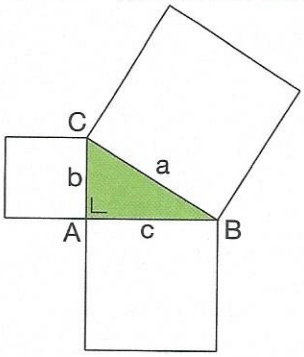
....

....

....

Théorème de Pythagore

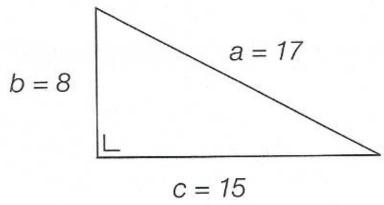
Dans tout triangle rectangle, le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des côtés de l'angle droit.

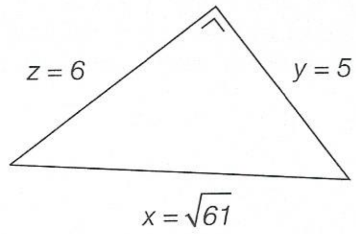


Relation de Pythagore

$$|\hat{A}| = 90° \Rightarrow \begin{cases} |BC|^2 = |AC|^2 + |AB|^2 \\ a^2 = b^2 + c^2 \end{cases}$$

Exemples





$a^2 = b^2 + c^2$

$17^2 = 8^2 + 15^2$

$289 = 64 + 225$

$289 = 289$

$x^2 = y^2 + z^2$

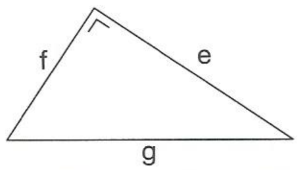
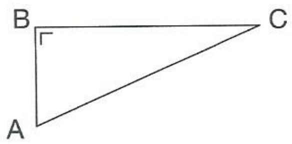
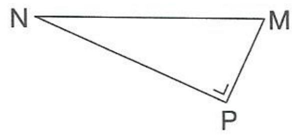
$\sqrt{61}^{\,2} = 5^2 + 6^2$

$61 = 25 + 36$

$61 = 61$

Exercices

1 Écris pour chaque triangle rectangle la relation de Pythagore.

Dessin			
Relation	....	....	....

2 Dans un triangle XYZ rectangle en X, le point A est le pied de la hauteur issue du point X. Écris la relation découlant du théorème de Pythagore dans les triangles XYZ, XAY et XAZ.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

3 Dans un triangle ABC rectangle en B, D est le point d'intersection de la médiatrice m de [AB] avec le segment [AB] et E est le point d'intersection de la médiatrice n de [BC] avec le segment [BC]. Les droites m et n coupent [AC] en F.
Écris la relation découlant du théorème de Pythagore dans les triangles ADF et FEC.

....

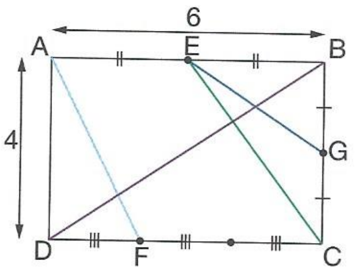
....

....

....

....

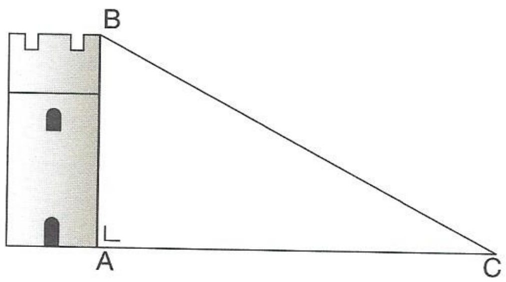
4 Si tu sais que la figure ABCD représentée ci-dessous est un rectangle, relie les expressions correspondantes.



$\lvert EC \rvert^2$ •	• $6^2 + 4^2$
$\lvert AF \rvert^2$ •	• $4^2 + 2^2$
$\lvert EG \rvert^2$ •	• $4^2 + 3^2$
$\lvert BD \rvert^2$ •	• $3^2 + 2^2$

Activité 3 • Calcul de la mesure d'un côté d'un triangle rectangle

1 Recherche de la longueur de l'hypoténuse



Lors de festivités, une commune organise une descente en câble à partir de la vieille tour du château haute de 32 m.
L'arrivée se fait au centre de la Grand Place qui est situé à 60 m du pied de la tour.

Détermine la longueur du câble qu'il faut prévoir pour aménager la descente.

Données : ....

....

....

Inconnue : ....

Relation de Pythagore

....

Solution

....

....

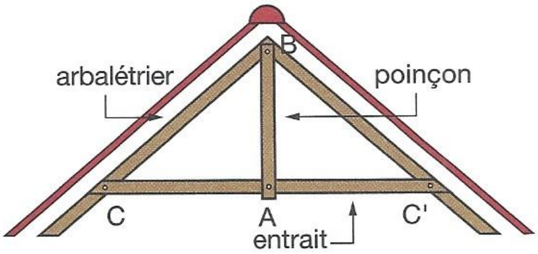
....

....

....

....

2 Recherche de la longueur d'un côté de l'angle droit



Dans la construction d'une charpente représentée ci-contre, le boulon fixant les arbalétriers au poinçon et celui fixant un arbalétrier à l'entrait sont distants de 3285 mm. Les boulons fixant l'entrait aux arbalétriers sont distants de 5134 mm.

Détermine, au mm près, la distance séparant les deux boulons fixant le poinçon.

Données : ....

....

....

Inconnue : ....

Relation de Pythagore

....

Solution

....

....

....

....

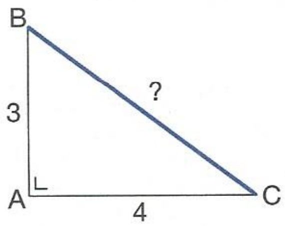
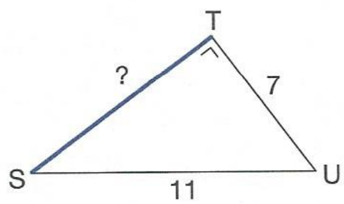
....

....

....

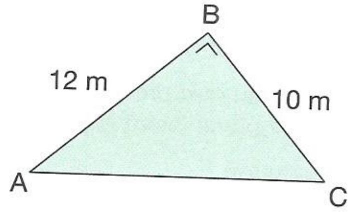
....

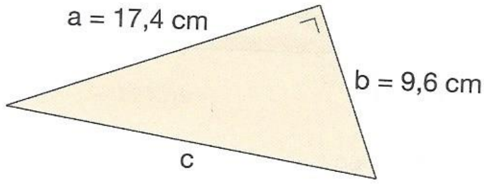
Calcul de la mesure d'un côté d'un triangle rectangle

Recherche de…	la longueur de l'hypoténuse	la longueur d'un côté de l'angle droit
		
Écrire la relation découlant du théorème de Pythagore.	Dans le triangle ABC rectangle en A, on a : $\lvert BC\rvert^2 = \lvert AB\rvert^2 + \lvert AC\rvert^2$	Dans le triangle STU rectangle en T, on a : $\lvert SU\rvert^2 = \lvert ST\rvert^2 + \lvert TU\rvert^2$
Remplacer les longueurs de segments connues par leur mesure et calculer les carrés.	$\lvert BC\rvert^2 = 3^2 + 4^2$ $\lvert BC\rvert^2 = 9 + 16$	$11^2 = \lvert ST\rvert^2 + 7^2$ $121 = \lvert ST\rvert^2 + 49$
Isoler, si nécessaire, la longueur inconnue et la calculer.	$\lvert BC\rvert^2 = 25$ $\lvert BC\rvert^2 = \sqrt{25}$ $\lvert BC\rvert = 5$	$\lvert ST\rvert^2 = 121 - 49$ $\lvert ST\rvert^2 = 72$ $\lvert ST\rvert = \sqrt{72}$ $\lvert ST\rvert \cong 8{,}485$

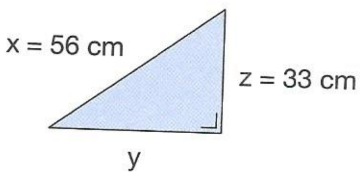
Exercices

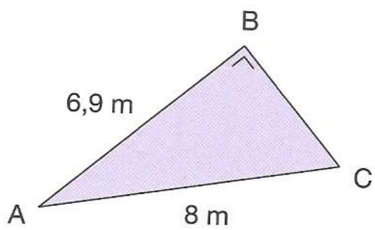
1 Pour chaque triangle rectangle ci-dessous, calcule la longueur de l'hypoténuse au centième près de l'unité proposée.





2 Pour chaque triangle rectangle, calcule la mesure inconnue du côté de l'angle droit au centième près de l'unité proposée.





3 Le triangle ABC est rectangle en A.
Calcule la longueur inconnue si tu sais que toutes les longueurs sont exprimées dans la même unité.

	$\|AB\|$	$\|AC\|$	$\|BC\|$
a)	6	8	
b)	2,4	1	
c)	5		13
d)		1,6	2
e)	8,5		13,2

a) ....

....

....

....

....

....

....

b) ....

....

....

....

....

....

....

c) ....

....

....

....

....

....

....

d) ....

....

....

....

....

....

....

e) ....

....

....

....

....

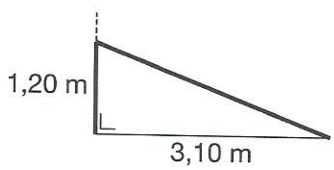
....

....

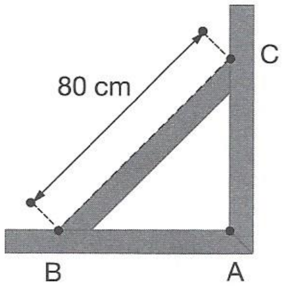
4 Détermine, à 0,01 cm près, la hauteur d'un triangle équilatéral de 5 cm de côté.

5 Détermine, à 0,01 cm près, le périmètre d'un losange si tu sais que la grande diagonale mesure 7 cm et la petite diagonale 4 cm.

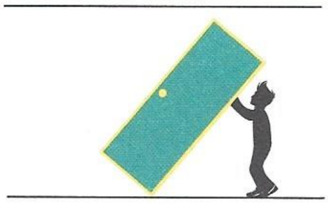
6 Lors d'une tempête particulièrement violente, le tronc d'un arbre s'est brisé.
Observe le schéma de la situation et détermine, au cm près, la hauteur de l'arbre avant la tempête.



7 Afin de consolider une équerre de maçon, une barre de renfort de 80 cm (longueur extérieure de la barre) doit être soudée à égale distance de l'angle droit.
Détermine à 0,01 cm près, la distance de chaque point de soudure (B et C) jusqu'à l'angle droit (A).

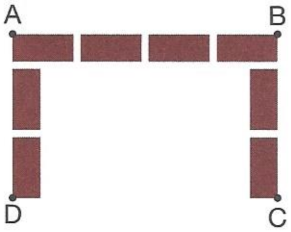


8 La hauteur sous plafond du living d'Adèle est de 2,50 m.
Une armoire, dont les dimensions sont de 2,43 m de haut, 72 cm de largeur et 45 cm de profondeur, est couchée sur le sol de la pièce.
Est-il possible de la redresser ? Envisage les deux possibilités.



Activité 4 • Réciproque du théorème de Pythagore

1 Lucas a posé le premier lit de briques de son nouveau barbecue. Avant de poursuivre la construction de cet ouvrage, il souhaite vérifier la perpendicularité des murs ainsi formés et prend, pour ce faire, différentes mesures.



$|AB| = 76$ cm $|AD| = 57$ cm $|BC| = 57$ cm

$|BD| = 95$ cm $|AC| = 96$ cm

La relation de Pythagore s'applique dans un triangle rectangle.
Vérifie si c'est le cas pour…

a) le triangle ABD.

b) le triangle ABC.