ANGLES

Angles

Compétences à atteindre

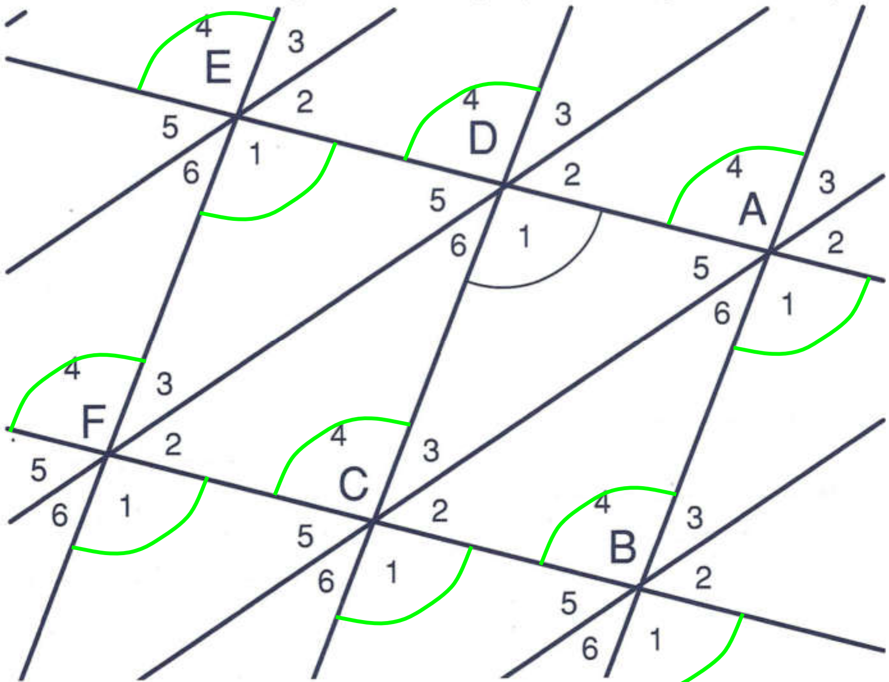
1) Décoder des représentations géométriques.
2) Construire, à l'aide du matériel adéquat, des figures en respectant un programme de construction, en utilisant les propriétés des figures, en respectant des conditions.
3) Déterminer l'amplitude des angles en se basant sur les propriétés des familles de figures, des droites remarquables et des angles remarquables.
4) Organiser une démarche pour déterminer la véracité d'un énoncé, pour dégager une propriété géométrique.
5) Nommer et situer les angles formés par deux droites coupées par une sécante.
6) Restituer et utiliser les propriétés des angles formés par deux parallèles coupées par une sécante.
7) Vérifier la véracité d'une proposition et justifier sa réponse par un contre-exemple, par une définition, par une règle ou par une propriété.

AngleS

1) Activité 1 : Pavage et angles de même amplitude
****

a) Activité de découverte 1 :
~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.

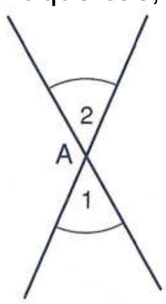
Dans le pavage ci-dessous, colorie quelques angles qui ont la même amplitude que l’angle repéré. Comment est-il possible d’expliquer ces égalités d’amplitudes ?

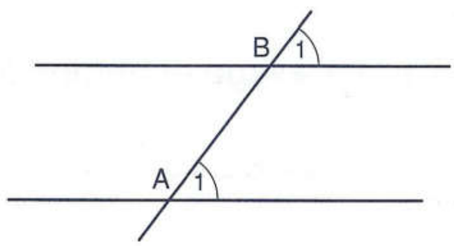


Par symétrie centrale de centre D ou par translation de vecteur DE ou par symétrie centrale de centre X.

b) Activité de découverte 2 :
~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.

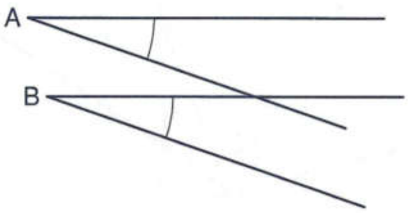
Dans chaque cas, que peux-tu dire de l’amplitude des angles marqués ? Explique.

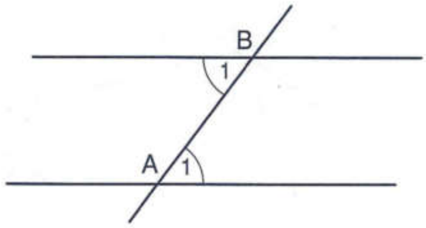




Les deux angles ont la même amplitude, en effet il existe une symétrie centrale de centre A qui applique l’angle $\hat{A}_1$ sur l’angle $\hat{A}_2$. | $\hat{A}_1$ | = | $\hat{A}_2$ |

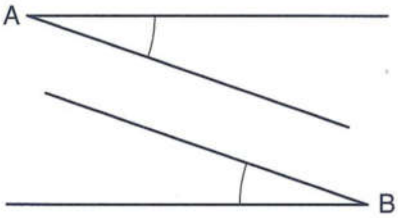
Les deux angles ont la même amplitude, en effet il existe une translation qui applique l’angle $\hat{A}_1$ sur l’angle $\widehat{B}_1$. | $\hat{A}_1$ | = | $\widehat{B}_1$ |

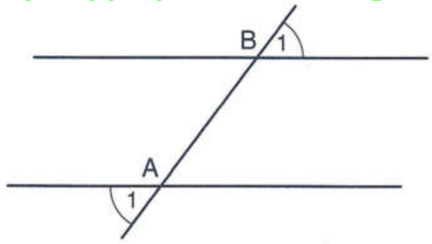




Les deux angles ont la même amplitude, en effet il existe une translation qui applique l'angle $\hat{A}$ sur l'angle $\widehat{B}$. | $\hat{A}$ | = | $\widehat{B}$ |

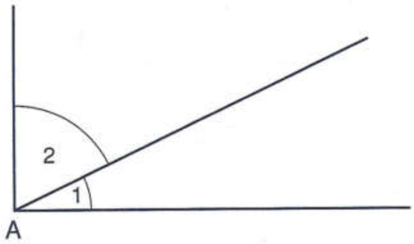
Les deux angles ont la même amplitude, en effet il existe une symétrie centrale de centre O qui applique $\hat{A}_1$ sur l'angle $\widehat{B}_1$. | $\hat{A}_1$ | = | $\widehat{B}_1$ |

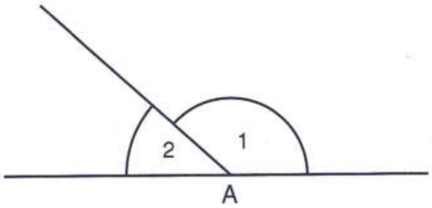




Les deux angles ont la même amplitude, en effet il existe une symétrie centrale de centre O qui applique l'angle $\hat{A}$ sur l'angle $\widehat{B}$. | $\hat{A}$ | = | $\widehat{B}$ |

Les deux angles ont la même amplitude, en effet il existe une symétrie centrale de centre O qui applique l'angle $\hat{A}_1$ sur l'angle $\widehat{B}_1$. | $\hat{A}_1$ | = | $\widehat{B}_1$ |





Ces deux angles forment un angle droit. La somme de leurs amplitudes vaut 90°. | $\hat{A}_1$ | + | $\hat{A}_2$ | = 90°

Ces deux angles forment un angle plat. La somme de leurs amplitudes vaut 180°. | $\hat{A}_1$ | + | $\hat{A}_2$ | = 180°

2) Activité 2 : Représentation d'angles particuliers

****

a) Activité de découverte 1 :

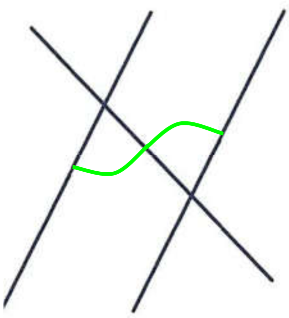
~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.

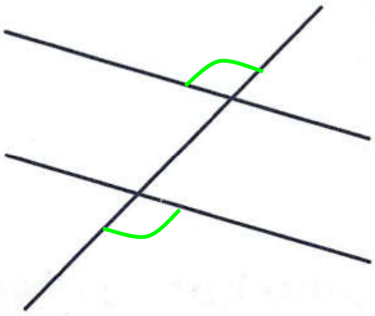
Représente deux angles :

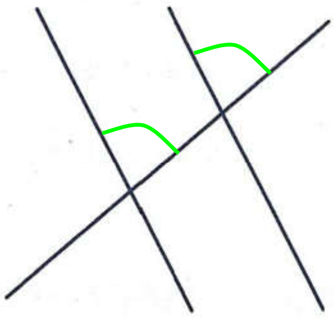
alternes internes

alternes externes

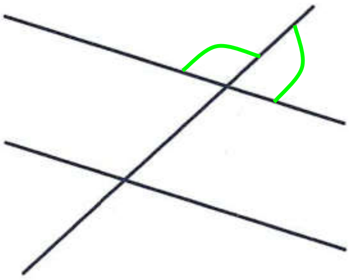
correspondants



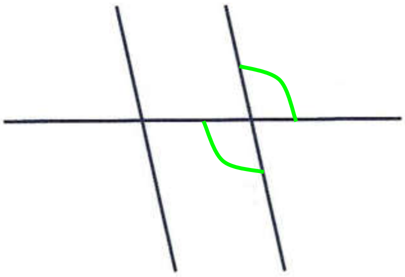




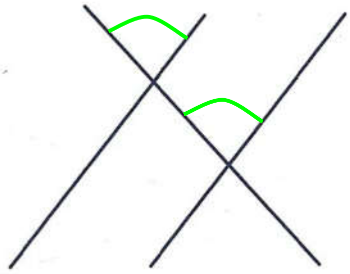
supplémentaires



opposés par le sommet



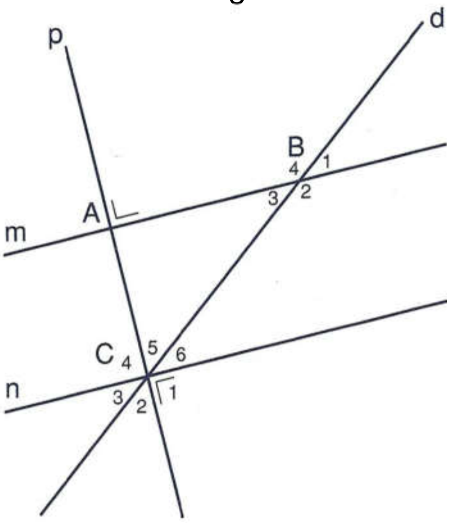
à côtés parallèles et de même sens



b) Activité de découverte 2 :

~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.

En observant la figure ci-dessous, complète les phrases.

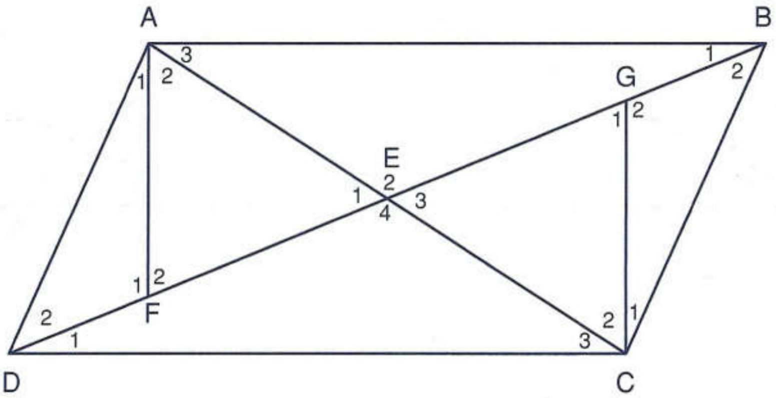


Les angles $\widehat{B}_1$ et $\widehat{C}_6$ sont correspondants.
Les angles $\widehat{C}_6$ et $\widehat{C}_3$ sont opposés par le sommet.
Les angles $\widehat{C}_2$ et $\widehat{C}_3$ sont complémentaires.
Les angles $\widehat{B}_2$ et $\widehat{B}_3$ sont supplémentaires.
Les angles $\widehat{C}_3$ et $\widehat{B}_1$ sont alternes externes.
Les angles $\widehat{B}_3$ et $\widehat{C}_6$ sont alternes internes.

c) Activité de découverte 3 :

~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.

Dans le parallélogramme ABCD de centre E, on a tracé [AF] ⊥ [AB] et [CG] ⊥ [CD].



En observant le dessin, complète les phrases suivantes .
Les angles $\widehat{A}_2$ et $\widehat{A}_3$ sont **complémentaires**
Les angles $\widehat{E}_2$ et $\widehat{E}_4$ sont **opposés par le sommet**
Les angles $\widehat{D}_1$ et $\widehat{B}_1$ sont **alternes-internes**
Les angles $\widehat{F}_1$ et $\widehat{F}_2$ sont **supplémentaires**
Les angles $\widehat{G}_2$ et $\widehat{F}_1$ sont **alternes-externes**
Les angles $\widehat{A}_3$ et $\widehat{C}_3$ sont **alternes-internes**

3) Activité 3 : Recherche d'amplitudes d'angles

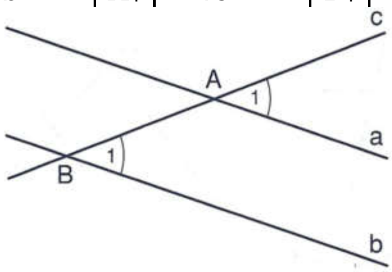
****

a) Activité de découverte 1 :

~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.

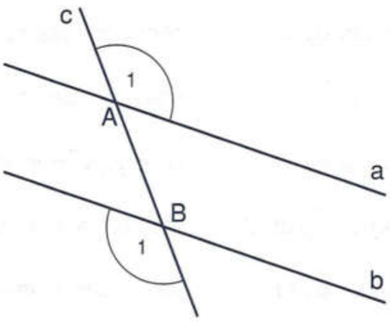
Sans mesurer, trouve l'amplitude de l'angle demandé. Justifie.

1) a // b $|\widehat{A}_1| = 40°$ $|\widehat{B}_1| = ?$



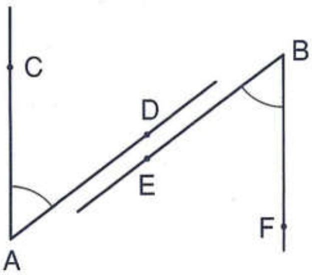
$\widehat{A}_1$ et $\widehat{B}_1$ sont 2 angles correspondants
$\Rightarrow |\widehat{A}_1| = |\widehat{B}_1|$
Or $|\widehat{A}_1| = 40° \Rightarrow |\widehat{B}_1| = 40°$

2) a // b $|\widehat{A}_1| = 130°$ $|\widehat{B}_1| = ?$



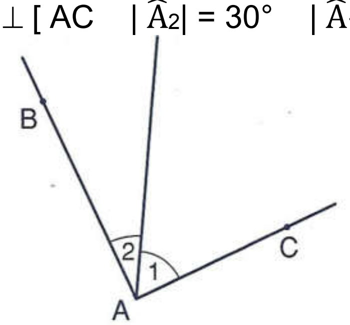
$\widehat{A}_1$ et $\widehat{B}_1$ sont 2 angles alternes-externes
$\Rightarrow |\widehat{A}_1| = |\widehat{B}_1|$
Or $|\widehat{A}_1| = 130° \Rightarrow |\widehat{B}_1| = 130°$

3) [AC // [BF [AD // [BE
$|\widehat{A}| = 53°$ $|\widehat{B}| = ?$



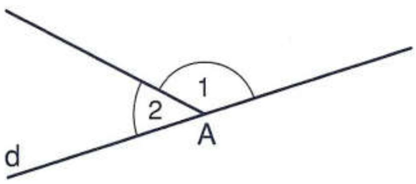
$\widehat{A}$ et $\widehat{B}$ sont 2 angles à côtés parallèles et de sens contraire
$\Rightarrow |\widehat{A}| = |\widehat{B}|$
Or $|\widehat{A}| = 53° \Rightarrow |\widehat{B}| = 53°$

4) [AB $\perp$ [AC $|\widehat{A}_2| = 30°$ $|\widehat{A}_1| = ?$



$\widehat{A}_1$ et $\widehat{A}_2$ sont des angles complémentaires
$\Rightarrow |\widehat{A}_1| + |\widehat{A}_2| = 90°$
Or $|\widehat{A}_2| = 30° \Rightarrow |\widehat{A}_1| = 60°$

5) A $\in$ d $|\widehat{A}_2| = 45°$ $|\widehat{A}_1| = ?$

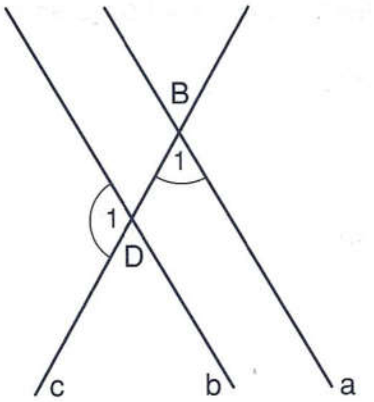


$\widehat{A}_1$ et $\widehat{A}_2$ sont des angles supplémentaires
$\Rightarrow |\widehat{A}_1| + |\widehat{A}_2| = 180°$
Or $|\widehat{A}_2| = 45° \Rightarrow |\widehat{A}_1| = 135°$

b) Activité de découverte 2 :
~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.

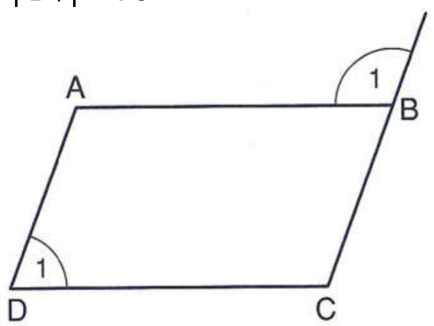
Détermine l'amplitude de l'angle $\widehat{B}_1$ en connaissant celle de l'angle $\widehat{D}_1$.

1) a // b $\quad |\widehat{D}_1| = 120°$



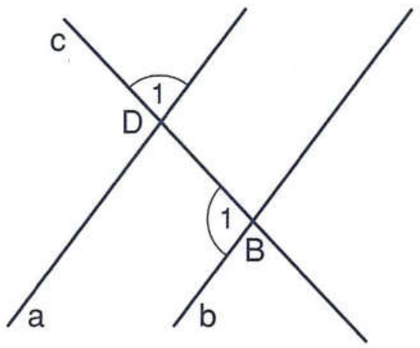
$\widehat{D}_1$ et $\widehat{B}_2$ sont des angles correspondants
$\Rightarrow |\widehat{D}_1| = |\widehat{B}_2|$
Or $|\widehat{D}_1| = 120° \Rightarrow |\widehat{B}_2| = 120°$
$\widehat{B}_1$ et $\widehat{B}_2$ sont des angles supplémentaires
$\Rightarrow |\widehat{B}_1| + |\widehat{B}_2| = 180°$
Or $|\widehat{B}_2| = 120° \Rightarrow |\widehat{B}_1| = 60°$

2) [AB] // [DC] et [AD] // [CB
$|\widehat{D}_1| = 70°$



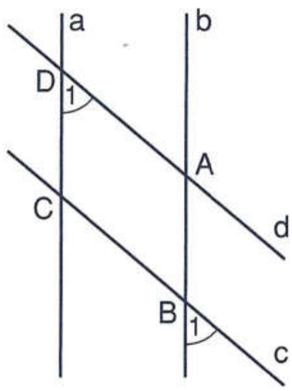
$\widehat{D}_1$ et $\widehat{B}_2$ sont des angles opposés d'un parallélogramme.
$\Rightarrow |\widehat{D}_1| = |\widehat{B}_2|$
Or $|\widehat{D}_1| = 70° \Rightarrow |\widehat{B}_2| = 70°$
$\widehat{B}_1$ et $\widehat{B}_2$ sont des angles supplémentaires
$\Rightarrow |\widehat{B}_1| + |\widehat{B}_2| = 180°$
Or $|\widehat{B}_2| = 70° \Rightarrow |\widehat{B}_1| = 110°$

3) a // b $\quad |\widehat{D}_1| = 80°$



$\widehat{D}_1$ et $\widehat{B}_2$ sont des angles correspondants.
$\Rightarrow |\widehat{D}_1| = |\widehat{B}_2|$
Or $|\widehat{D}_1| = 80° \Rightarrow |\widehat{B}_2| = 80°$
$\widehat{B}_1$ et $\widehat{B}_2$ sont des angles supplémentaires
$\Rightarrow |\widehat{B}_1| + |\widehat{B}_2| = 180°$
Or $|\widehat{B}_2| = 80° \Rightarrow |\widehat{B}_1| = 100°$

4) a // b et c // d $\quad |\widehat{D}_1| = 50°$



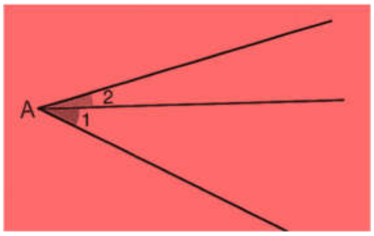
$\widehat{D}_1$ et $\widehat{A}_1$ sont des angles correspondants.
$\Rightarrow |\widehat{D}_1| = |\widehat{A}_1|$
Or $|\widehat{D}_1| = 50° \Rightarrow |\widehat{A}_1| = 50°$
$\widehat{B}_1$ et $\widehat{A}_1$ sont des angles correspondants
$\Rightarrow |\widehat{B}_1| = |\widehat{A}_1|$
Or $|\widehat{A}_1| = 50° \Rightarrow |\widehat{B}_1| = 50°$

Angles particuliers

Angles adjacents

Définition : Deux angles adjacents sont deux angles qui ont le même sommet, un côté commun et sont situés de part et d'autre de ce côté commun.

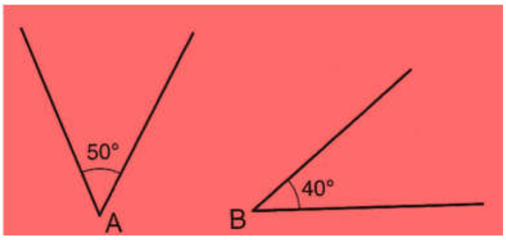
Exemple : $\hat{A}_1$ et $\hat{A}_2$ sont deux angles adjacents.



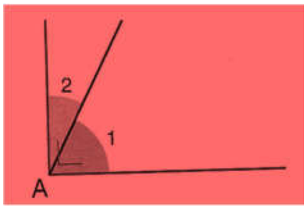
Angles complémentaires

Définition : Deux angles complémentaires sont deux angles dont la somme des amplitudes vaut 90°

Exemple : $|\hat{A}| + |\hat{B}| = 90°$



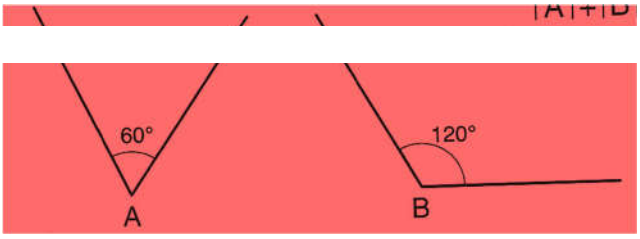
Propriété : Deux angles complémentaires adjacents forment un angle droit.
$|\hat{A}_1| + |\hat{A}_2| = 90°$



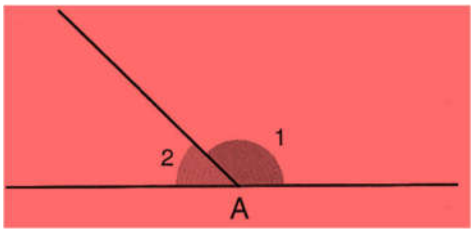
Angles supplémentaires

Définition : Deux angles supplémentaires sont deux angles dont la somme des amplitudes vaut 180°.

Exemple : $|\hat{A}| + |\hat{B}| = 180°$



Propriété : Deux angles supplémentaires adjacents forment un angle plat.
$|\hat{A}_1| + |\hat{A}_2| = 180°$



Angles formés par deux droites sécantes

Angles opposés par le sommet

Définition : Deux angles opposés par le sommet sont deux angles qui ont le même sommet et leurs côtés dans le prolongement l'un de l'autre.

Propriétés : Deux angles opposés par le sommet sont images l'un de l'autre par une symétrie centrale.
Deux angles opposés par le sommet ont la même amplitude.

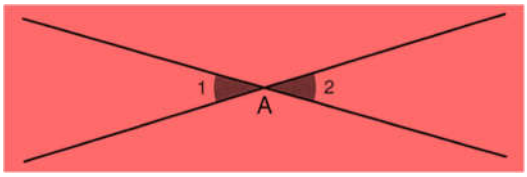
$\hat{A}_1$ et $\hat{A}_2$ sont opposés par le sommet

$\Downarrow$

$s_A (\hat{A}_1) = \hat{A}_2$

$\Downarrow$

$| \hat{A}_1 | = | \hat{A}_2 |$



Angles formés par deux droites parallèles coupées par une sécante

Angles correspondants

Propriétés : Deux angles correspondants sont images l'un de l'autre par une translation.
Deux angles correspondants ont la même amplitude.

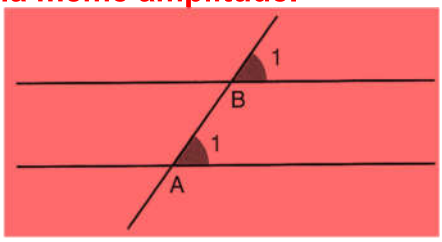
$\hat{A}_1$ et $\hat{B}_1$ sont deux angles correspondants

$\Downarrow$

$t_{\overrightarrow{AB}} (\hat{A}_1) = \hat{B}_1$

$\Downarrow$

$| \hat{A}_1 | = | \hat{B}_1 |$



Angles alternes internes

Définition : Deux angles alternes internes sont deux angles situés de part et d'autre de la sécante et à l'intérieur des parallèles.

Propriétés : Deux angles alternes internes sont images l'un de l'autre par une symétrie centrale.
Deux angles alternes internes ont la même amplitude.

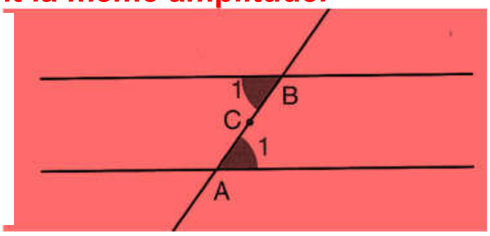
$\hat{A}_1$ et $\hat{B}_1$ sont deux angles alternes internes

$\Downarrow$

$s_C (\hat{A}_1) = \hat{B}_1$

$\Downarrow$

$| \hat{A}_1 | = | \hat{B}_1 |$



C est le milieu de [AB]

Angles alternes externes

Définition : Deux angles alternes externes sont deux angles situés de part et d'autre de la sécante et à l'extérieur des parallèles.

Propriétés : Deux angles alternes externes sont images l'un de l'autre par une symétrie centrale.
Deux angles alternes externes ont la même amplitude.

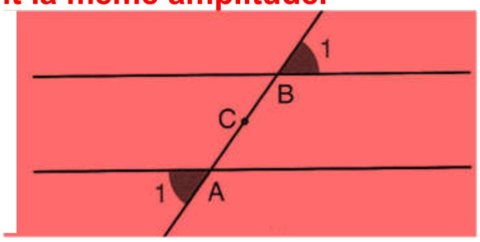
$\hat{A}_1$ et $\hat{B}_1$ sont deux angles alternes externes

$\Downarrow$

$s_C (\hat{A}_1) = \hat{B}_1$

$\Downarrow$

$| \hat{A}_1 | = | \hat{B}_1 |$



C est le milieu de [AB]

Angles à côtés parallèles

Angles à côtés parallèles et de même sens

Propriétés : Deux angles à côtés parallèles et de même sens sont images l'un de l'autre par une translation.
Deux angles à côtés parallèles et de même sens ont la même amplitude.

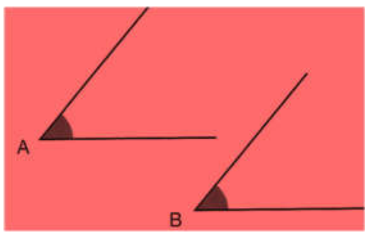
$\hat{A}$ et $\hat{B}$ sont deux angles à côtés parallèles et de même sens

$\Downarrow$

$t_{\overrightarrow{AB}} (\hat{A}) = \hat{B}$

$\Downarrow$

$| \hat{A} | = | \hat{B} |$



<u>Angles à côtés parallèles et sens contraires</u>

Propriétés : Deux angles à côtés parallèles et de sens contraires sont images l'un de l'autre
Deux angles à côtés parallèles et de sens contraires ont la même amplitude.

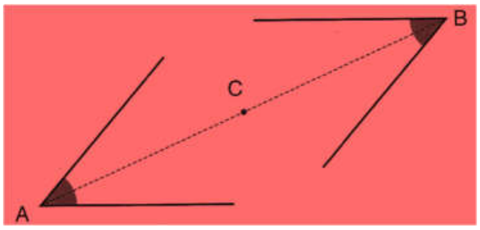
$\hat{A}$ et $\hat{B}$ sont deux angles à côtés parallèles et de sens contraires

$\Downarrow$

sc ($\hat{A}$) = $\hat{B}$

$\Downarrow$

| $\hat{A}$ | = | $\hat{B}$ |



C est le milieu de [AB]

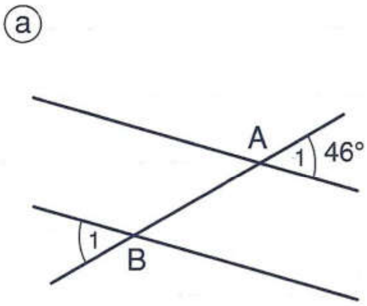
4) Exercices complémentaires

****

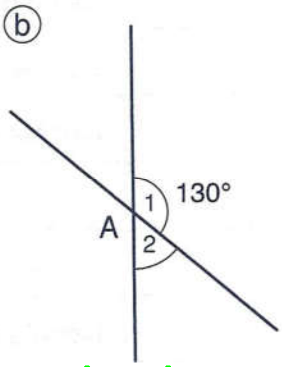
Série A :

~.~.~.~.~.

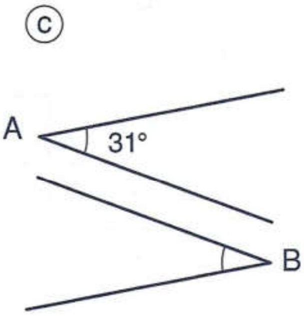
1) Dans chaque cas, détermine l'amplitude de l'angle marqué et justifie.



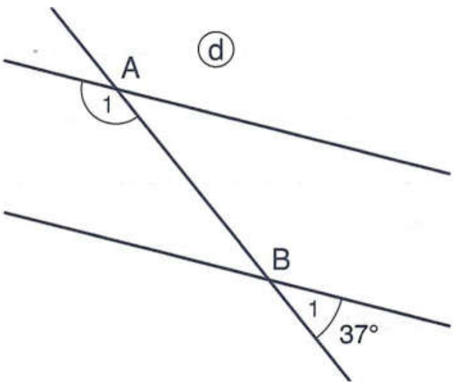
Les angles $\hat{A}_1$ et $\hat{B}_1$ sont des angles alternes externes ⇒ | $\hat{A}_1$ | = | $\hat{B}_1$ |.
Or | $\hat{A}_1$ | = 46° ⇒ | $\hat{B}_1$ | = 46°

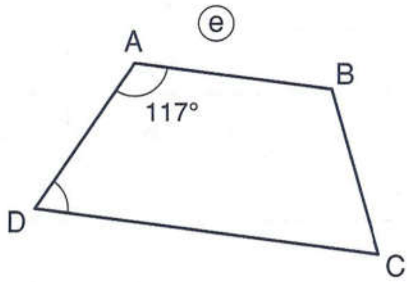


Les angles $\hat{A}_1$ et $\hat{A}_2$ sont des angles supplémentaires ⇒ | $\hat{A}_1$ | + | $\hat{A}_2$ | = 180°
Or | $\hat{A}_1$ | = 130° ⇒ | $\hat{A}_2$ | = 50°



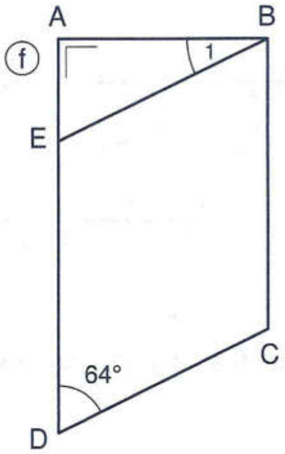
Les angles $\hat{A}$ et $\hat{B}$ sont des angles aigus à côtés parallèles et de sens contraires ⇒ | $\hat{A}$ | = | $\hat{B}$ |.
Or |$\hat{A}$ | = 31° ⇒ | $\hat{B}$ | = 31°

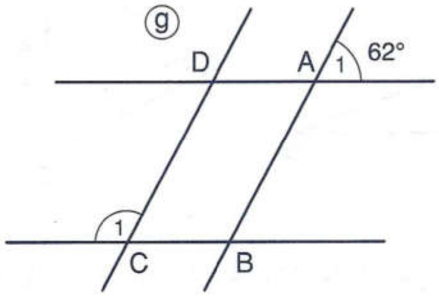


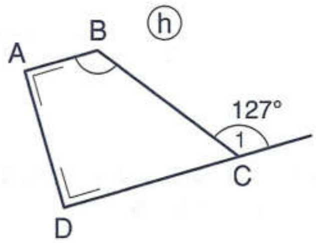


Les angles $\hat{B}_1$ et $\hat{B}_2$ sont des angles supplémentaires ⇒ | $\hat{B}_1$ | + | $\hat{B}_2$ | = 180°
Or | $\hat{B}_1$ | = 37° ⇒ | $\hat{B}_2$ | = 143°
Les angles $\hat{B}_2$ et $\hat{A}_1$ sont des angles alternes internes ⇒ | $\hat{B}_2$ | = | $\hat{A}_1$ |
Or | $\hat{B}_2$ | = 143° ⇒ | $\hat{A}_1$ | = 143°

Les angles $\hat{A}_1$ et $\hat{A}_2$ sont des angles supplémentaires ⇒ | $\hat{A}_1$ | + | $\hat{A}_2$ | = 180°
Or | $\hat{A}_1$ | = 117° ⇒ | $\hat{A}_2$ | = 63°
Les angles $\hat{A}_2$ et $\hat{D}$ sont des angles correspondants ⇒ | $\hat{A}_2$ | = | $\hat{D}$ |
Or | $\hat{A}_2$ | = 63° ⇒ | $\hat{D}$ | = 63°





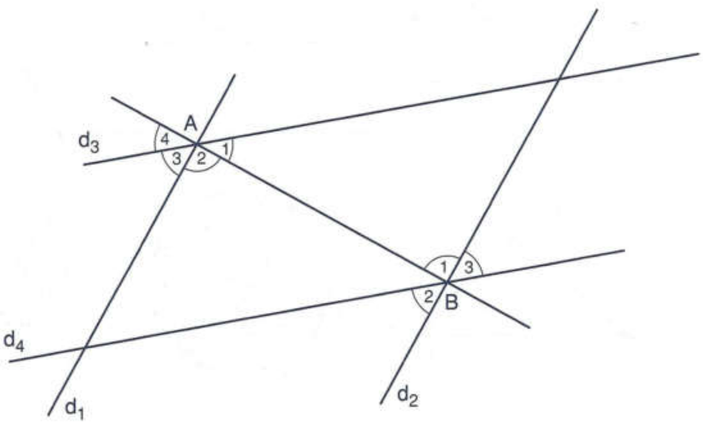


Les angles $\widehat{D}$ et $\widehat{B}_2$ sont des angles aigus à côtés parallèles et de sens contraires (ou les angles opposés d'un parallélogramme)
$\Rightarrow |\widehat{B}_2| = |\widehat{D}|$. Or $|\widehat{D}| = 64°$
$\Rightarrow |\widehat{B}_2| = 64°$.
Les angles $\widehat{B}_1$ et $\widehat{B}_2$ sont des angles complémentaires
$\Rightarrow |\widehat{B}_1| + |\widehat{B}_2| = 90°$
Or $|\widehat{B}_2| = 64° \Rightarrow |\widehat{B}_1| = 26°$

Les angles $\hat{A}_1$ et $\hat{A}_2$ sont des angles supplémenatires
$\Rightarrow |\hat{A}_1| + |\hat{A}_2| = 180°$
Or $|\hat{A}_1| = 62° \Rightarrow |\hat{A}_2| = 118°$
Les angles $\hat{A}_2$ et $\hat{C}_1$ sont des angles obtus à côtés parallèles et de sens Contraires $\Rightarrow |\hat{A}_2| = |\hat{C}_1|$
Or $|\hat{A}_2| = 118° \Rightarrow |\hat{C}_1| = 118°$

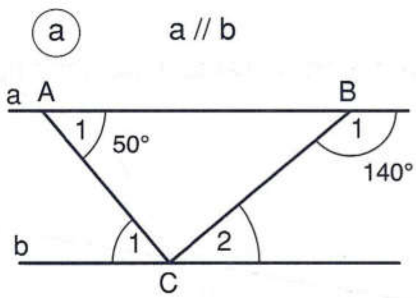
Les angles $\hat{C}_1$ et $\widehat{B}$ sont des angles alternes internes
$\Rightarrow |\hat{C}_1| = |\widehat{B}|$.
Or $|\hat{C}_1| = 127° \Rightarrow$
$|\widehat{B}| = 127°$

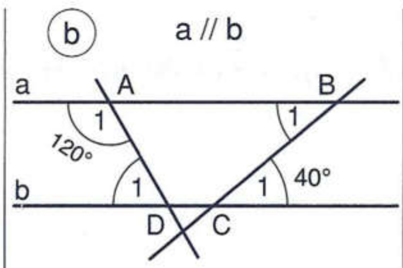
2) Si tu sais que $d_1 // d_2$, $d_3 // d_4$, $|\hat{A}_2| = 90°$ et $|\hat{A}_1| = 39°$, calcule l'amplitude des angles marqués.

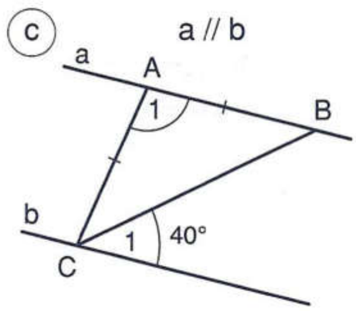


$|\hat{A}_4| = |\hat{A}_1| = 39°$
$|\hat{A}_2| = |\widehat{B}_1| = 90°$
$|\hat{A}_3| = 90° - |\hat{A}_4| = 51°$
$|\hat{A}_3| = |\widehat{B}_2| = 51°$
$|\widehat{B}_3| = |\widehat{B}_2| = 51°$

3) Calcule le plus simplement possible l'amplitude des angles marqués dans les figures ci-dessous.



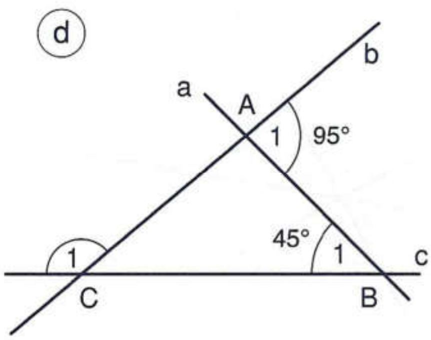




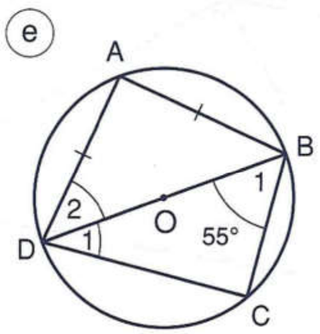
Les angles $\hat{A}_1$ et $\hat{C}_1$ sont des angles alternes internes $\Rightarrow |\hat{A}_1| = |\hat{C}_1|$
Or $|\hat{A}_1| = 50° \Rightarrow |\hat{C}_1| = 50°$
Les angles $\hat{B}_1$ et $\hat{B}_2$ sont des angles supplémentaires
$\Rightarrow |\hat{B}_1| + |\hat{B}_2| = 180°$
Or $|\hat{B}_1| = 140° \Rightarrow |\hat{B}_2| = 40°$
Les angles $\hat{C}_2$ et $\hat{B}_2$ sont des angles alternes internes $\Rightarrow |\hat{C}_2| = |\hat{B}_2|$.
Or $|\hat{B}_2| = 40° \Rightarrow |\hat{C}_2| = 40°$

Les angles $\hat{B}_1$ et $\hat{C}_1$ sont des angles alternes internes $\Rightarrow |\hat{B}_1| = |\hat{C}_1|$
Or $|\hat{C}_1| = 40° \Rightarrow |\hat{B}_1| = 40°$
Les angles $\hat{A}_1$ et $\hat{A}_2$ sont des angles supplémentaires
$\Rightarrow |\hat{A}_1| + |\hat{A}_2| = 180°$
Or $|\hat{A}_1| = 120° \Rightarrow |\hat{A}_2| = 60°$
Les angles $\hat{A}_2$ et $\hat{D}_1$ sont des angles alternes internes $\Rightarrow |\hat{A}_2| = |\hat{D}_1|$.
Or $|\hat{A}_2| = 60° \Rightarrow |\hat{D}_1| = 60°$

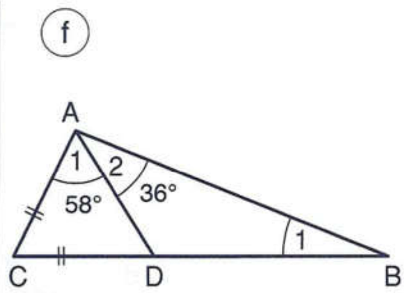
Les angles $\hat{B}_1$ et $\hat{C}_1$ sont des angles alternes internes $\Rightarrow |\hat{B}_1| = |\hat{C}_1|$
Or $|\hat{C}_1| = 40° \Rightarrow |\hat{B}_1| = 40°$
Le triangle ABC est isocèle en A $\Rightarrow |\hat{B}_1| = |\hat{C}_2|$
Or $|\hat{B}_1| = 40° \Rightarrow |\hat{C}_2| = 40°$
Dans le triangle ABC, $|\hat{A}_1| + |\hat{B}_1| + |\hat{C}_2| = 180°$
Or $|\hat{B}_1| = |\hat{C}_2| = 40° \Rightarrow$
$|\hat{A}_1| = 180° - 40° - 40° = 100°$



L'angle $\hat{A}_1$ est extérieur au triangle ABC $\Rightarrow |\hat{A}_1| = |\hat{B}_1| + |\hat{C}_2|$
Or $|\hat{A}_1| = 95°$ et $|\hat{B}_1| = 45°$
$\Rightarrow |\hat{C}_2| = 50°$
Les angles $\hat{C}_1$ et $\hat{C}_2$ sont des angles supplémentaires
$\Rightarrow |\hat{C}_1| + |\hat{C}_2| = 180°$
Or $|\hat{C}_2| = 50° \Rightarrow |\hat{C}_1| = 130°$

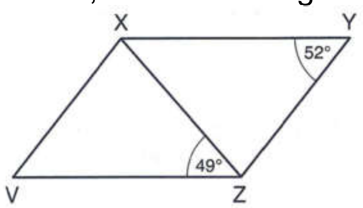


Le triangle ABD est inscrit dans un demi-cercle $\Rightarrow$ ABD est rectangle en A $\Rightarrow |\hat{A}| = 90°$. De plus le triangle ABD est isocèle en A $\Rightarrow$ $|\hat{B}_2| = |\hat{D}_2| \Rightarrow |\hat{D}_2| = 45°$.
Le triangle BDC est inscit dans un demi-cercle $\Rightarrow$ BDC est rectangle en C $\Rightarrow$ $|\hat{C}| = 90°$. Dans le triangle BDC, $|\hat{B}_1| + |\hat{C}| + |\hat{D}_1| = 180°$. Or $|\hat{B}_1| = 55°$ et $|\hat{C}_1| = 90° \Rightarrow |\hat{D}_1| = 35°$



Le triangle ACD est isocèle en C $\Rightarrow |\hat{A}_1| = |\hat{D}_1|$. Or $|\hat{A}_1| = 58° \Rightarrow |\hat{D}_1| = 58°$. L'angle $\hat{D}_1$ est extérieur au triangle ABD $\Rightarrow |\hat{D}_1| = |\hat{A}_2| + |\hat{B}|$.
Or $|\hat{D}_1| = 58°$ et $|\hat{A}_2| = 36°$
$\Rightarrow |\hat{B}| = 22°$

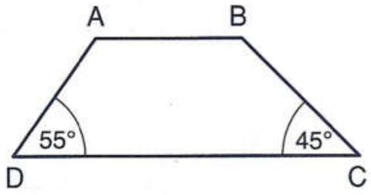
4) Le quadrilatère XYZV est un parallélogramme. Peux-tu, avec les renseignements fournis, dire si le triangle XYZ est rectangle ? Explique.



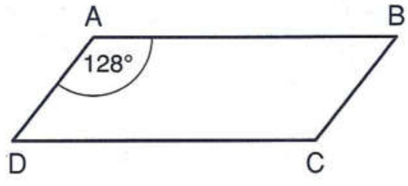
Le triangle XYZ n'est pas rectangle car $|\widehat{ZXY}| = 49°$ et $|\widehat{XZY}| = 79°$.

5) Trouve l'amplitude de tous les angles sans utiliser ton rapporteur et en expliquant ton raisonnement.

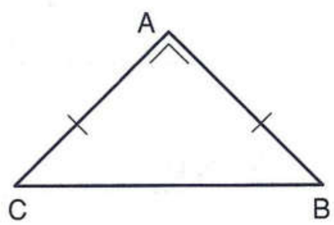
a)



b)



c)

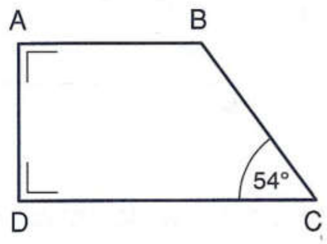


Les angles $\hat{A}$ et $\hat{D}$ sont adjacents à un côté non parallèle du trapèze $\Rightarrow |\hat{A}| + |\hat{D}| = 180°$.
Or $|\hat{D}| = 55° \Rightarrow |\hat{A}| = 180° - 55° = 125°$.
Les angles $\hat{C}$ et $\hat{B}$ sont adjacents à un côté non parallèle du trapèze $\Rightarrow |\hat{C}| + |\hat{B}| = 180°$
Or $|\hat{C}| = 45° \Rightarrow$
$|\hat{B}| = 180° - 45° = 135°$

Dans le parallélogramme ABCD, les angles opposés ont la même amplitude $\Rightarrow$ $|\hat{C}| = |\hat{A}| = 128°$. Dans un quadrilatère, la somme des amplitudes des angles vaut $360° \Rightarrow |\hat{D}| + |\hat{B}| = 360° - 128° - 128° = 104°$.
Dans le parallélogramme ABCD, les angles opposés ont la même amplitude $\Rightarrow$
$|\hat{D}| = |\hat{B}| = 104° : 2 = 52°$

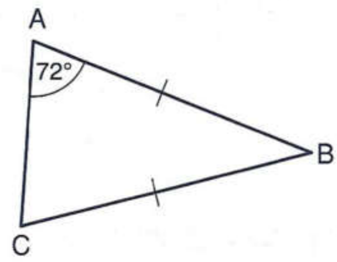
Le triangle ACD est rectangle isocèle en A $\Rightarrow |\hat{A}| = 90°$ et $|\hat{C}| = |\hat{B}| = 45°$.

d)



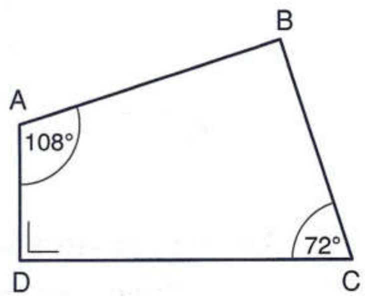
Le trapèze ABCD est rectangle en A et D $\Rightarrow |\hat{A}| = |\hat{D}| = 90°$. Dans un quadrilatère, la somme des amplitudes des angles vaut $360° \Rightarrow |\hat{B}| = 360° - 2 . 90° - 54° = 126°$.

e)



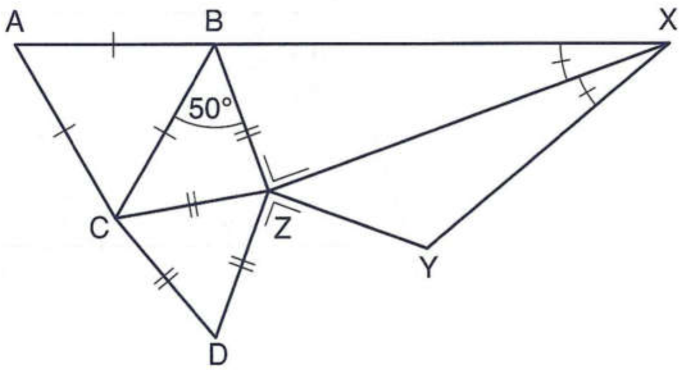
Le triangle ABC est isocèle en B $\Rightarrow$
$|\hat{C}| = |\hat{A}|$. Or $|\hat{A}| = 72° \Rightarrow$
$|\hat{C}| = 72°$.
Dans un triangle, la somme des amplitudes des angles vaut $180° \Rightarrow$
$|\hat{B}| = 180° - 2 . 72° = 36°$

f)



Dans le quadrilatère ABCD, $\hat{C}$ est un angler droit $\Rightarrow |\hat{D}| = 90°$. Dans un quadrilatère, la somme des amplitudes des angles vaut $360° \Rightarrow |\hat{B}| = 360° - 108° - 72° - 90° = 90°$

6) Calcule l'amplitude des angles du triangle XYZ si tu sais que les points A, B et X sont alignés.

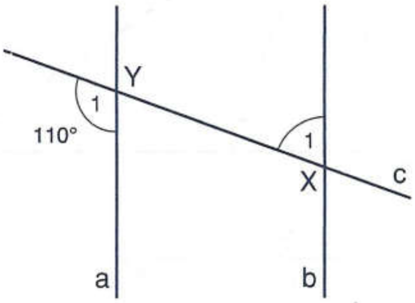


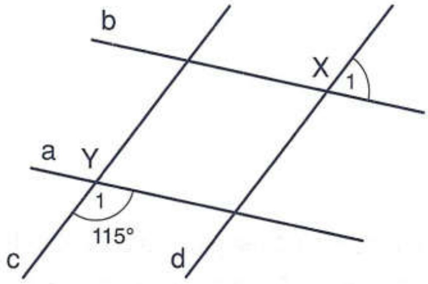
$|\widehat{ZXY}| = |\widehat{BXZ}| = 180° - 90° - 70° = 20°$ (triangle rectangle BXZ et triangle équilatéral ABC)
$|\widehat{XZY}| = 360° - 2 . 90° - 60° - 80° = 40°$ (car CDZ est équilatéral et BCZ isocèle)
$|\widehat{ZYX}| = 180° - 20° - 40° = 120°$ (calcul dans le triangle XYZ)

Série B :

~.~.~.~.~.

1) Dans les figures ci-dessous, a // b et c // d. Calcule l'amplitude de l'angle $\hat{X}_1$ et justifie tes résultats.

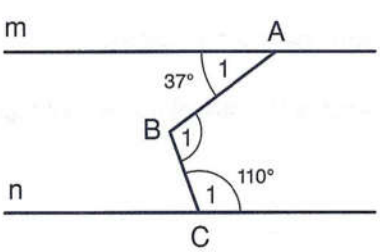


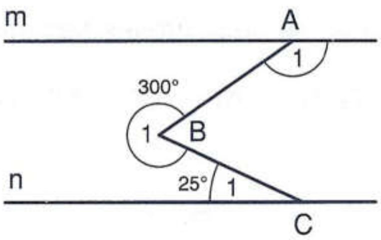


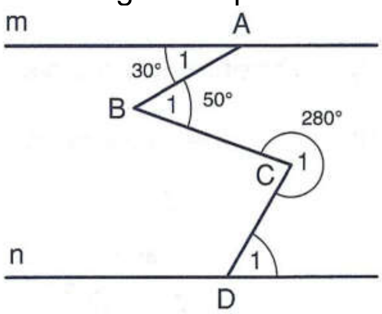
Les angles $\widehat{Y}_1$ et $\widehat{X}_2$ sont des angles correspondants $\Rightarrow$ $|\widehat{Y}_1| = |\widehat{X}_2|$
Or $|\widehat{Y}_1| = 110°$ $\Rightarrow$ $|\widehat{X}_2| = 110°$
Les angles $\widehat{X}_1$ et $\widehat{X}_2$ sont des angles supplémentaires $\Rightarrow |\widehat{X}_1| + |X_2| = 180°$
Or $|\widehat{X}_2| = 110°$ $\Rightarrow |\widehat{X}_1| = 70°$

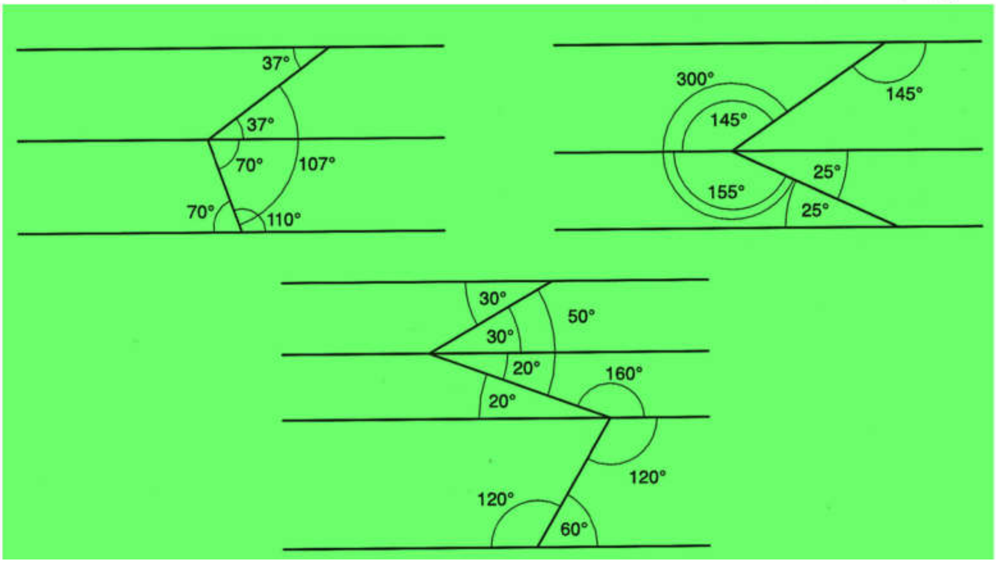
Les angles $\widehat{Y}1$ et $\widehat{X}2$ sont des angles à côtés parallèles et de même sens $\Rightarrow$ $|\widehat{Y}_1| = |\widehat{X}_2|$
Or $|\widehat{Y}_1| = 115°$ $\Rightarrow$ $|\widehat{X}_2| = 115°$
Les angles $\widehat{X}_1$ et $\widehat{X}_2$ sont des angles supplémentaires $\Rightarrow |\widehat{X}_1| + |\widehat{X}_2| = 180°$
Or $|\widehat{X}_2| = 115°$ $\Rightarrow |\widehat{X}_1| = 65°$

2) Dans les figures ci-dessous, m // n. Calcule l'amplitude de l'angle marqué.

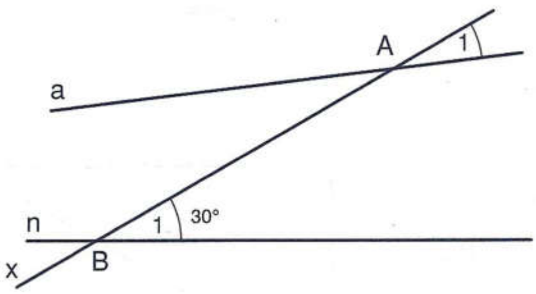


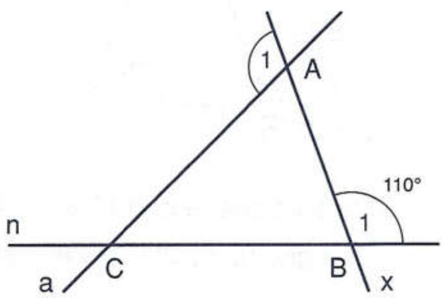






3) Trouve de l'angle marqué pour que les droites a et n soient parallèles.

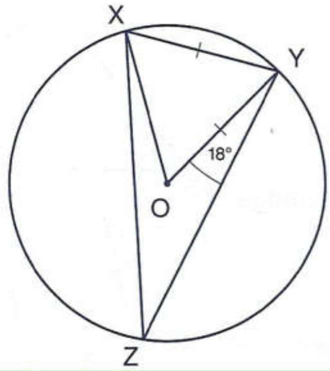


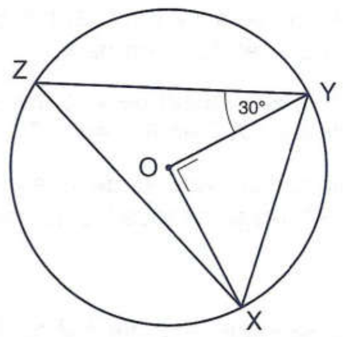


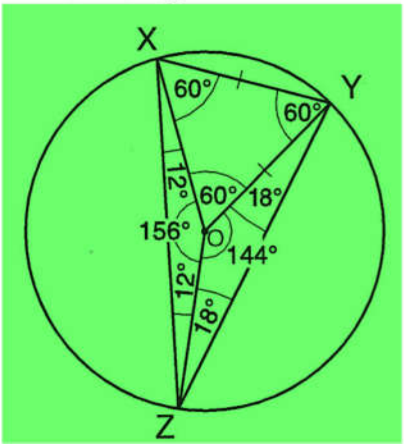
$|\widehat{B}_1| = 30°$ (angles correspondants)

$|\widehat{A}_1| = 180° - 110° = 70°$

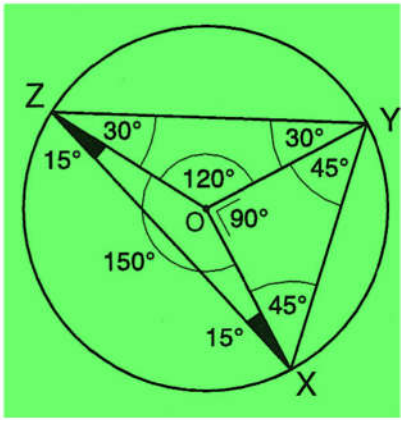
4) En utilisant les données fournies par le dessin, calcule l'amplitude des angles du triangle XYZ.





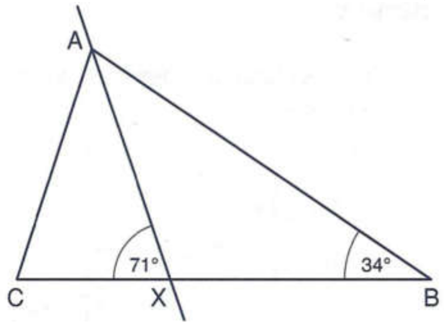


$| \widehat{X} | = 72°$
$| \widehat{Y} | = 78°$
$| \widehat{Z} | = 30°$



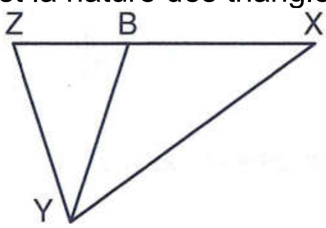
$| \widehat{X} | = 60°$
$| \widehat{Y} | = 75°$
$| \widehat{Z} | = 45°$

5) Dans le triangle ci-contre, la droite AX est la bissectrice de l'angle de sommet A. En utilisant les données du dessin, calcule $\widehat{C}$.



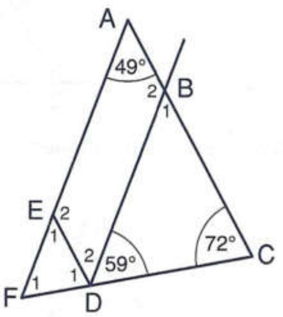
$| \widehat{AXB} | = 180° - 7° = 109°$
$\Rightarrow | \widehat{XAB} | = 180° - 34° - 109° = 37°$
Or $| \widehat{CAB} | = 2 . 37° = 74°$
$\Rightarrow | \widehat{C} | = 180° - 34° - 74° = 72°$

6) Le triangle XYZ est isocèle en X et YB est la bissectrice de l'angle de sommet Y. Quelle est la nature des triangles XBY et BZY si tu sais que $| \widehat{X} | = 36°$?



$| \widehat{Z} | = | \widehat{ZYX} | = 72° \Rightarrow | \widehat{ZYB} | = 36°$ et $| \widehat{BYX} | = 36°$
Or $| \widehat{X} | = 36° \Rightarrow$ triangle BYX est isocèle en B.
$| \widehat{Z} | = 72°$ et $| \widehat{ZYB} | = 36° \Rightarrow | \widehat{ZBY} | = 72° \Rightarrow$ triangle BZY est isocèle en Y

7) Voici une figure dans laquelle BD // AF et ED // AC. Recherche les amplitudes demandées.



$| \widehat{B}_1 | = 49°$
$| \widehat{B}_2 | = 131°$
$| \widehat{E}_1 | = 49°$
$| \widehat{E}_2 | = 131°$
$| \widehat{D}_1 | = 72°$
$| \widehat{D}_2 | = 49°$
$| \widehat{F}_1 | = 59°$

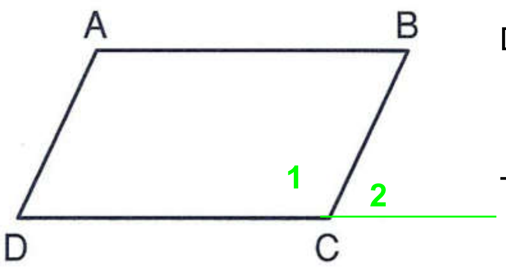
5) Activité 4 : Propriétés : démonstration

****

a) Activité de découverte 1 :

~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.

Démontre que deux angles consécutifs d'un parallélogramme sont supplémentaires.



Données : **ABCD est un parallélogramme**
$|AB| = |DC|$ et $|BC| = |AD|$
AB // DC et BC // AD

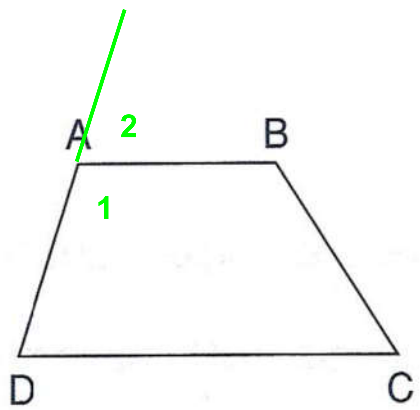
Thèse : **$|\hat{D}| + |\hat{C}| = 180°$**

Démonstration : **$\hat{D}$ et $\hat{C}$ sont deux angles consécutifs.**
On prolonge [DC]. Les angles $\hat{C}_1$ et $\hat{C}_2$ forment un angle plat.
$\Rightarrow |\hat{C}_1| + |\hat{C}_2| = 180°$.
Les angles $\hat{D}$ et $\hat{C}_2$ sont des angles correspondants
$\Rightarrow |\hat{D}| = |\hat{C}_2|$
On remplace dans $|\hat{C}_1| + |\hat{C}_2| = 180°$; $|\hat{C}_2|$ par $|\hat{D}|$
$\Rightarrow |\hat{C}_1| + |\hat{D}| = 180° \Rightarrow$ supplémentaires.

b) Activité de découverte 2 :

~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.

Démontre que dans le trapèze ci-dessous, les angles $\hat{A}$ et $\hat{D}$ sont supplémentaires.



Données : **Trapèze ABCD**
AB // DC

Thèse : **$|\hat{D}| + |\hat{A}| = 180°$**

Démonstration : **$\hat{D}$ et $\hat{A}_1$ sont deux angles consécutifs.**
On prolonge [DA]. Les angles $\hat{A}_1$ et $\hat{A}_2$ forment un angle plat.
$\Rightarrow |\hat{A}_1| + |\hat{A}_2| = 180°$.
Les angles $\hat{D}$ et $\hat{A}_2$ sont des angles correspondants
$\Rightarrow |\hat{D}| = |\hat{A}_2|$
On remplace dans $|\hat{A}_1| + |\hat{A}_2| = 180°$; $|\hat{A}_2|$ par $|\hat{D}|$
$\Rightarrow |\hat{A}_1| + |\hat{D}| = 180° \Rightarrow$ supplémentaires.

Trouve d'autres angles supplémentaires dans le trapèze ABCD.
$|\hat{C}| + |\hat{B}| = 180°$

Enonce la propriété que tu viens de démontrer.
Dans un trapèze, les angles adjacents à un des côtés non parallèles sont supplémentaires.

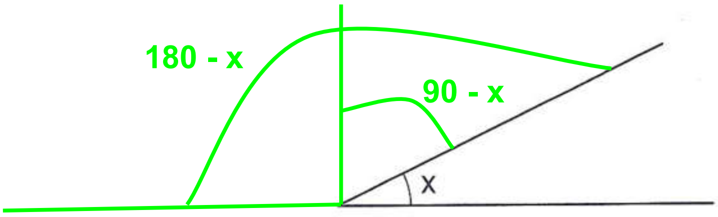
c) Activité de découverte 3 :

~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.

Complète le tableau.

Amplitude de l'angle	69°	42°	85°
Supplément de l'angle	**111°**	**128°**	**95°**
Complément de l'angle	**21°**	**38°**	**5°**
Différence entre le supplément et le complément de l'angle	**90°**	**90°**	**90°**

Détermine graphiquement et par calcul la différence entre le supplément et le complément d'un angle d'amplitude x°.



(180 - x) - (90 - x) = 180 - x - 90 + x = 90

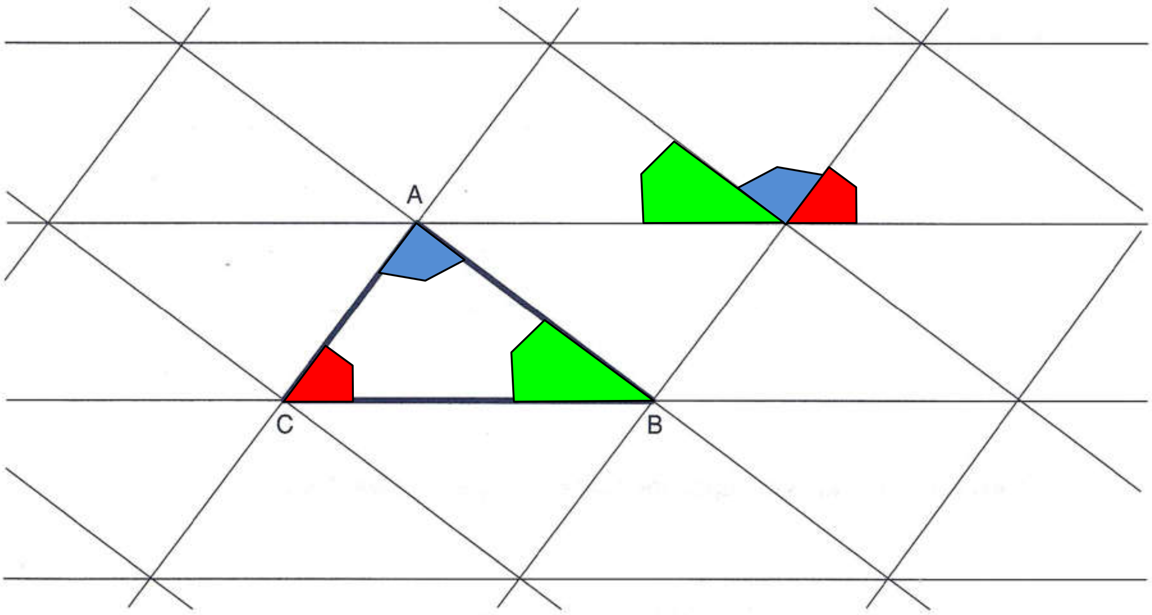
6) Activité 5 : Somme des amplitudes des angles d'un triangle

****

a) Activité de découverte 1 :

~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.

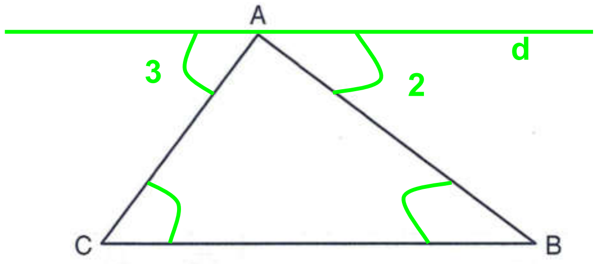
Tu sais peut être que dans un triangle, la somme des amplitudes des angles vaut 180°. Montre sur le pavage ci-dessous que les trois angles du triangle ABC peuvent former un angle plat.



b) Activité de découverte 2 :

~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.

Démontre cette propriété.



Données : Triangle quelconque ABC

Thèse : $|\hat{A}| + |\hat{B}| + |\hat{C}| = 180°$.

Démonstration : Par A, construis la droite d // BC, les angles $\hat{A}_2$ et $\hat{A}_3$ apparaissent.
Par cette construction, $\hat{B}$ et $\hat{A}_2$ sont alternes internes $\Rightarrow |\hat{B}| = |\hat{A}_2|$
$\hat{C}$ et $\hat{A}_3$ sont alternes internes $\Rightarrow |\hat{C}| = |\hat{A}_3|$
Les angles $\hat{A}_1$, $\hat{A}_2$ et $\hat{A}_3$ forment un angle plat $\Rightarrow$
$|\hat{A}_1| + |\hat{A}_2| + |\hat{A}_3| = 180°$.
Je remplace $|\hat{A}_2|$ par $|\hat{B}|$ et $|\hat{A}_3|$ par $|\hat{C}|$, on obtient alors
$|\hat{A}_1| + |\hat{B}| + |\hat{C}| = 180°$.

Angles d'un triangle

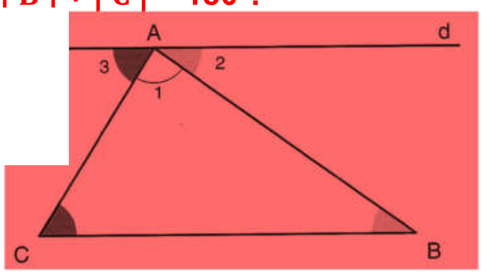
Somme des amplitudes des angles intérieurs d'un triangle

Propriété : La somme des amplitudes des angles intérieurs d'un triangle vaut 180°.

Données : Triangle quelconque ABC
$\hat{A}_1$, $\hat{B}$ et $\hat{C}$ angles intérieurs du triangle ABC

Thèse : $|\hat{A}_1| + |\hat{B}| + |\hat{C}| = 180°$.

Démonstration : Par A, trace la droite d // BC, les angles $\hat{A}_2$ et $\hat{A}_3$ apparaissent.
Par cette construction, $\hat{B}$ et $\hat{A}_2$ sont alternes internes
$\Rightarrow |\hat{B}| = |\hat{A}_2|$
$\hat{C}$ et $\hat{A}_3$ sont alternes internes
$\Rightarrow |\hat{C}| = |\hat{A}_3|$
Les angles $\hat{A}_1$, $\hat{A}_2$ et $\hat{A}_3$ forment un angle plat
$\Rightarrow |\hat{A}_1| + |\hat{A}_2| + |\hat{A}_3| = 180°$.
En remplçant $|\hat{A}_2|$ par $|\hat{B}|$ et $|\hat{A}_3|$ par $|\hat{C}|$, l'égalité devient
$|\hat{A}_1| + |\hat{B}| + |\hat{C}| = 180°$.



Amplitude d'un angle extérieur d'un triangle

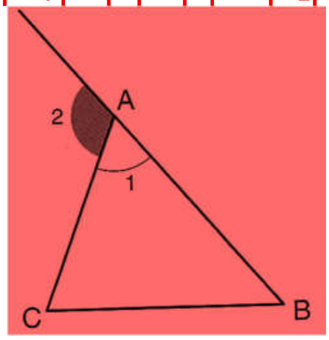
Définition : Un angle extérieur d'un triangle est un angle formé par un côté et le prolongement d'un autre côté issus d'un même sommet.

Propriété : L'amplitude d'un angle extérieur d'un triangle est égale à la somme des amplitudes des angles intérieurs non adjacents.

Données : ABC triangle quelconque
$\hat{A}_2$ angle extérieur au triangle ABC

Thèse : $|\hat{A}_2| = |\hat{B}| + |\hat{C}|$

Démonstration : La somme des amplitudes des angles intérieurs d'un triangle vaut 180°.
$\hat{A}_1$ et $\hat{A}_2$ sont deux angles adjacents supplémentaires $\Rightarrow$
$|\hat{A}_1| + |\hat{A}_2| = 180°$
En comparant les deux égalités, on a
$|\hat{A}_1| + |\hat{A}_2| = |\hat{A}_1| + |\widehat{B}| + |\widehat{C}| \Rightarrow |\hat{A}_2| = |\widehat{B}| + |\widehat{C}|$



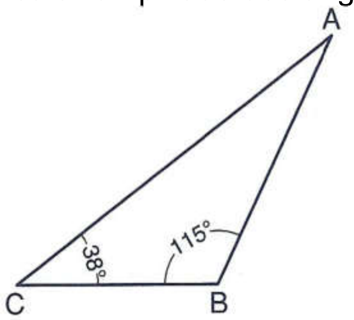
7) Activité 6 : Somme des amplitudes des angles d'un triangle

****

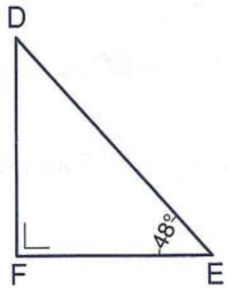
a) Activité de découverte 1 :

~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.

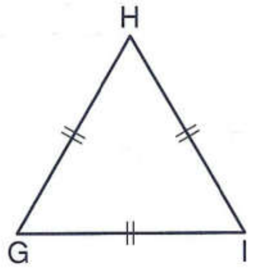
Calcule l'amplitude des angles de ces triangles.



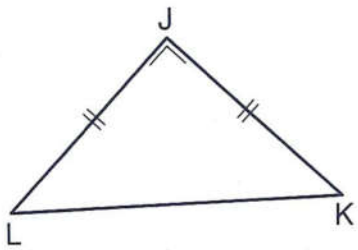
$|\widehat{B}| =$ **115°**
$|\widehat{C}| =$ **38°**
$|\widehat{A}| =$ **27°**



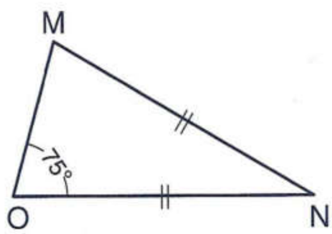
$|\widehat{F}| =$ **90°**
$|\widehat{E}| =$ **48°**
$|\widehat{D}| =$ **42°**



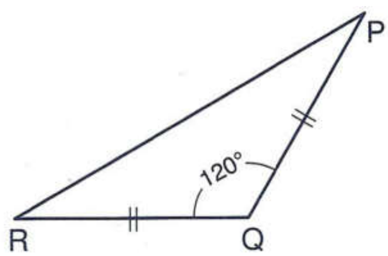
$|\widehat{G}| =$ **60°**
$|\widehat{H}| =$ **60°**
$|\widehat{I}| =$ **60°**



$|\widehat{J}| =$ **90°**
$|\widehat{L}| =$ **45°**
$|\widehat{K}| =$ **45°**



$|\widehat{O}| =$ **75°**
$|\widehat{M}| =$ **75°**
$|\widehat{N}| =$ **42°**

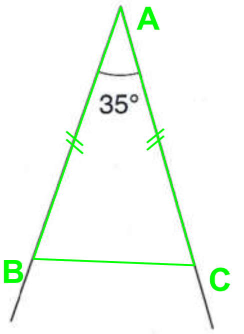


$|\widehat{Q}| =$ **120°**
$|\widehat{H}| =$ **30°**
$|\widehat{P}| =$ **30°**

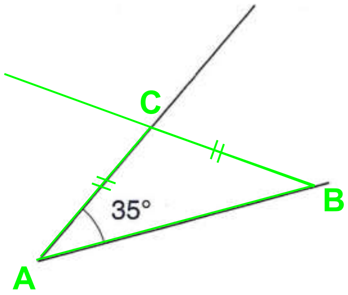
b) Activité de découverte 2 :

~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.

Construis un triangle isocèle si tu sais qu'un des angles mesures 35°. Explique ton raisonnement en envisageant tous les cas possibles.



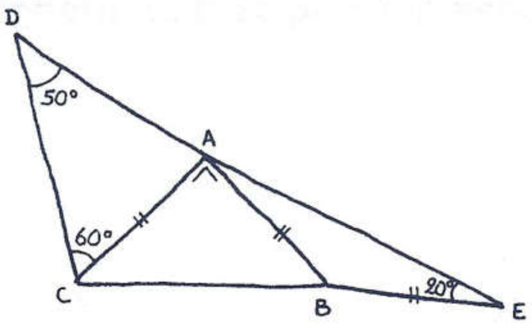
Nomme A le sommet de l'angle de 35°. Sue un des côtés de cet angle, placer le point B. Tracer un arc de cercle de centre A et de rayon | AB |. Cet arc de cercle coupe l'autre côté de l'angle en un point. Nommer ce point C. tracer le segment [BC]. Le triangle ABC est le triangle demandé.



Nommer A, le sommet de l'angle de 35°. Sur un des côtés de cet angle, placer un point B. Construire un angle de 35° ayant B comme sommet et [BA comme premier côté. Les deux demi droites tracées se coupent en un point. Nommer ce point C. Le triangle ABC est le triangle demandé.

c) Activité de découverte 3 :
~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.

1) Les points D, A, E sont-ils alignés ? Pourquoi ?

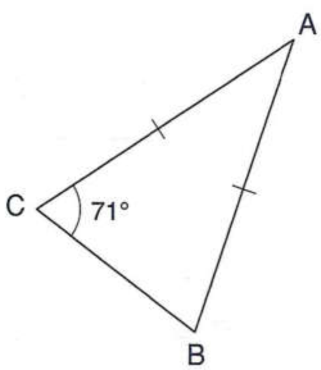


Puisque $|\hat{A}_1| = 70°$, $|\hat{A}_2| = 90°$ et $|\hat{A}_3| = 20°$, alors $|\hat{A}_1| + |\hat{A}_2| + |\hat{A}_3| = 70° + 90° + 20° = 180°$.
L'angle Â est donc un angle plat et les points D, A et E sont alignés.

2) Les points C, B, E sont-ils alignés ? Pourquoi ?
Puisque $|\hat{B}_1| = 45°$ et $|\hat{B}_2| = 140°$, alors $|\hat{B}_1| + |\hat{B}_2| = 45° + 140° = 185°$.
L'angle $\hat{B}$ n'est donc pas un angle plat et les points C, B et E ne sont pas alignés.

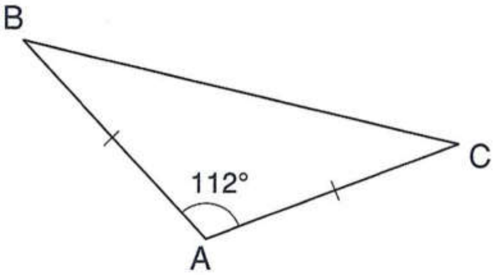
d) Activité de découverte 4 :
~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.

Détermine l'amplitude des angles de chaque triangle en expliquant ton raisonnement.
1)



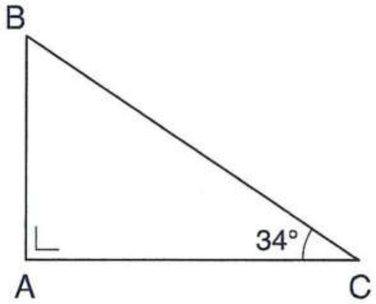
| AB | = | AC | => ABC est isocèle en A
=> $|\hat{B}| = |\hat{C}|$
Or $|\hat{C}| = 71°$ => $|\hat{B}| = 71°$
Dans le triangle ABC, la somme des amplitudes des angles intérieurs vaut 180°
=> $|\hat{A}| + |\hat{B}| + |\hat{C}| = 180°$
=> $|\hat{A}| + 71° + 71° = 180°$
=> $|\hat{A}| = 180° - 142°$
=> $|\hat{A}| = 38°$

2)



$|AB| = |AC|$ => ABC est isocèle en A
=> $|\hat{B}| = |\hat{C}|$
Dans le triangle ABC, la somme des amplitudes des angles intérieurs vaut 180°
=> $|\hat{A}| + |\hat{B}| + |\hat{C}| = 180°$
Or $|\hat{A}| = 112°$ => $112° + |\hat{B}| + |\hat{C}| = 180°$
=> $|\hat{B}| + |\hat{C}| = 180° - 112°$
=> $|\hat{B}| + |\hat{C}| = 68°$
Or $|\hat{B}| = |\hat{C}|$ => $2\,|\hat{B}| = 68°$ => $|\hat{B}| = 34°$ et $|\hat{C}| = 34°$

3)

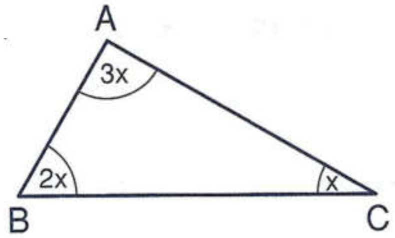


$|\hat{A}| = 90°$ => le triangle ABC est rectangle en A.
Dans un triangle rectangle, les angles aigus sont complémentaires => $|\hat{B}| + |\hat{C}| = 90°$
Or $|\hat{C}| = 34°$ => $|\hat{B}| + 34° = 90°$
=> $|\hat{B}| = 90° - 34°$
=> $|\hat{B}| = 56°$

e) Activité de découverte 5 :
~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.

Détermine l'amplitude des angles de chaque triangle.

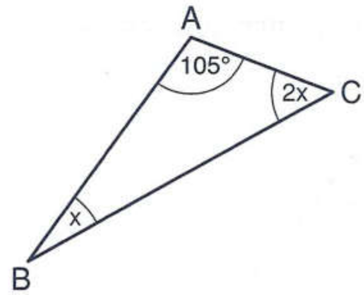
1)



$|\hat{A}| = 90°$
$|\hat{B}| = 60°$
$|\hat{C}| = 30°$

$3x + 2x + x = 180°$
$6x = 180°$
$x = 30°$

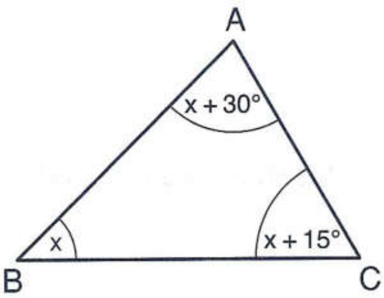
2)



$|\hat{A}| = 105°$
$|\hat{B}| = 25°$
$|\hat{C}| = 50°$

$x + 2x + 105° = 180°$
$3x = 180° - 105°$
$3x = 75°$
$x = 25°$

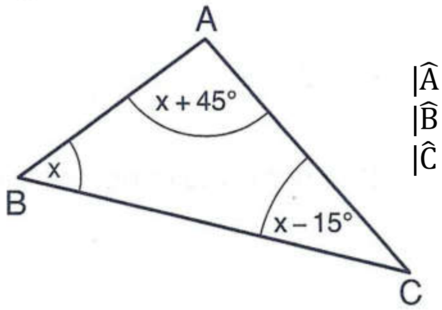
3)



$|\hat{A}| = 75°$
$|\hat{B}| = 45°$
$|\hat{C}| = 60°$

$x + x + 30° + x + 15° = 180°$
$3x = 180° - 30° - 15°$
$3x = 135°$
$x = 45°$

4)



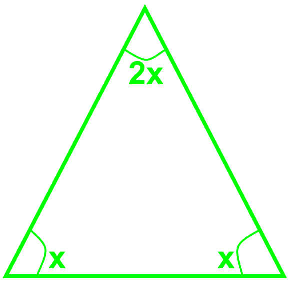
$|\hat{A}| = 95°$
$|\hat{B}| = 50°$
$|\hat{C}| = 35°$

$x + x + 45° + x - 15° = 180°$
$3x = 180° - 45° + 15°$
$3x = 150°$
$x = 50°$

f) Activité de découverte 6 :

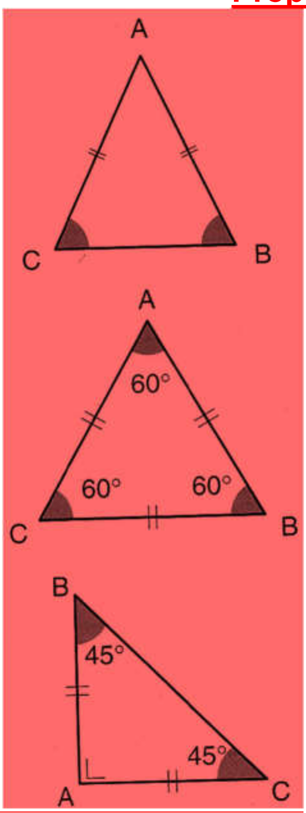
~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.

Construis un triangle isocèle si tu sais que l'amplitude de l'angle au sommet vaut le double de celle d'un des angles à la base.



x + x + 2x = 180°
4x = 180°
x = 45°

<u>Propriétés des angles de triangles particuliers</u>



Les angles à la base d'un triangle isocèle ont la même amplitude.
ABC triangle isocèle en A ⇒ | $\hat{B}$ | = | $\hat{C}$ |

Les angles d'un triangle équilatéral ont la même amplitude : 60°
ABC triangle équilatéral ⇒ | $\hat{A}$ | = | $\hat{B}$ | = | $\hat{C}$ | = 60°

Les angles d'un triangle rectangle isocèle ont toujours pour amplitudes : 90°, 45° et 45°.
ABC triangle rectangle isocèle en A ⇒ | $\hat{A}$ | = 90° et | $\hat{B}$ | = | $\hat{C}$ | = 45°

8) Exercices complémentaires

****

Série A :

~.~.~.~.~.

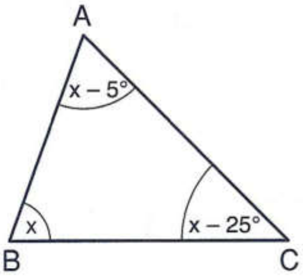
1) Complète le tableau ci-dessous.

| $\hat{A}$ |	| $\hat{B}$ |	| $\hat{C}$ |	Nature du triangle ABC
52°	**90°**	**38°**	Rectangle en B
76°	52°	**52°**	Isocèle en A
64°	52°	**64°**	Isocèle en B
52°	**76°**	52°	**Isocèle acutangle en B**
38°	**71°**	**71°**	Isocèle acutangle
22°	22°	**136°**	Isocèle obtusangle
26°	26°	**128°**	**Isocèle obtusangle en C**
45°	90°	**45°**	**Isocèle rectangle en B**

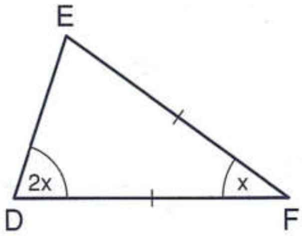
81°	18°	81°	Isocèle acutangle en B
30°	30°	120°	isocèle

2) Détermine l'amplitude des angles des triangles proposés en tenant compte des renseignements fournis.

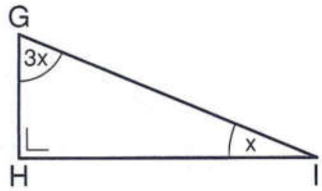
a)



b)



c)



a) $x + x - 5 + x - 25 = 180$
$3x = 180 + 30$
$x = 70$
$|\hat{A}| = 65°$
$|\hat{B}| = 70°$
$|\hat{C}| = 45°$

b) $2x + 2x + x = 180$
$5x = 180$
$x = 36$
$|\hat{E}| = 72°$
$|\hat{F}| = 36°$
$|\hat{D}| = 72°$

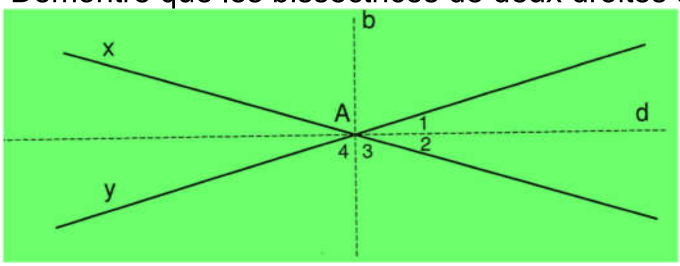
c) $3x + x = 90$
$4x = 90$
$x = 22{,}5$
$|\hat{G}| = 67{,}5°$
$|\hat{I}| = 22{,}5°$
$|\hat{H}| = 90°$

3) Détermine l'amplitude des angles d'un triangle isocèle si tu sais que l'amplitude d'un angle à la base vaut le quadruple de celle de l'angle au sommet.
$x + 4x + 4x = 180$
$x = 20$ Angle au sommet : 20° Chacun des angles à la base : 80°

4) Détermine l'amplitude des angles d'un triangle rectangle si tu sais que l'amplitude d'un angle aigu vaut 27° de plus que celle de l'autre angle aigu.
$x + x + 27 = 90$
$x = 31{,}5$ Les angles aigus du triangle rectangle mesurent 31,5° et 58,5°.

Série B :
~.~.~.~.~.

1) Démontre que les bissectrices de deux droites sécantes sont perpendiculaires.



Données : Les droites x et y sécantes en A.
b et d, bissectrices des angles formés par x et y
Thèse : $b \perp d$

Démonstration : Les angles $\hat{A}_1$, $\hat{A}_2$, $\hat{A}_3$ et $\hat{A}_4$ sont adjacents et forment un angle plat $\Rightarrow |\hat{A}_1| + |\hat{A}_2| + |\hat{A}_3| + |\hat{A}_4| = 180°$
Or $|\hat{A}_1| = |\hat{A}_2|$ et $|\hat{A}_3| = |\hat{A}_4|$ (car b et d sont des bissectrices).
En remplaçant dans la 1er égalité
$|\hat{A}_2| + |\hat{A}_2| + |\hat{A}_3| + |\hat{A}_3| = 180° \Rightarrow 2 . |\hat{A}_2| + 2 . |\hat{A}_3| = 180° \Rightarrow$
$2 . (|\hat{A}_2| + |\hat{A}_3|) = 180° \Rightarrow |\hat{A}_2| + |\hat{A}_3| = 90° \Rightarrow b \perp d$

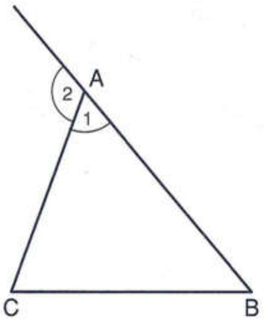
9) Activité 7 : Angle extérieur d'un triangle

****

a) Activité de découverte 1 :

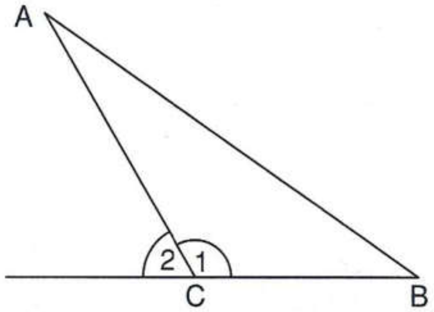
~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.

1) Détermine l'amplitude de l'angle $\hat{A}_2$ si tu sais que $|\hat{B}| = 50°$ et $|\hat{C}| = 70°$



$|\hat{A}_1| + |\hat{B}| + |\hat{C}| = 180°$
$|\hat{A}_1| + 50° + 70° = 180°$
$|\hat{A}_1| = 60°$
$|\hat{A}_1| + |\hat{A}_2| = 180°$
$|\hat{A}_2| + 60° = 180°$
$|\hat{A}_2| = 120°$

2) Détermine l'amplitude de l'angle $\hat{C}_2$ si tu sais que $|\hat{A}| = 25°$ et $|\hat{B}| = 35°$



$|\hat{A}| + |\hat{B}| + |\hat{C}_1| = 180°$
$|\hat{C}_1| + 25° + 35° = 180°$
$|\hat{C}_1| = 120°$
$|\hat{C}_1| + |\hat{C}_2| = 180°$
$|\hat{C}_2| + 120° = 180°$
$|\hat{C}_2| = 60°$

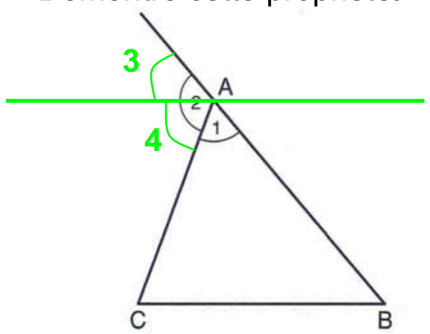
3) Enonce une règle facile permettant de trouver l'amplitude demandée dans chaque cas.

L'amplitude d'un angle extérieur d'un triangle est égale à la somme des amplitudes des angles intérieurs non adjacents.

b) Activité de découverte 2 :

~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.

Démontre cette propriété.



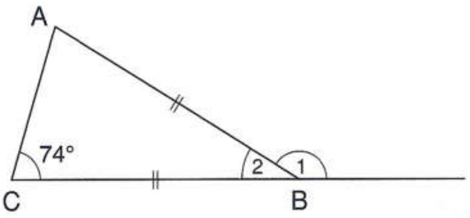
Données : **Soit ABC un triangle scalène**
$\hat{A}_1$ et $\hat{A}_2$ sont des angles supplémentaires

Thèse : **$|\hat{A}_2| = |\hat{B}| + |\hat{C}|$**

Démonstration : **Par A, tracer la droite parallèle à BC.**
Par cette construction, apparaissent les angles $\hat{A}_3$ et $\hat{A}_4$ tels que $|\hat{A}_2| = |\hat{A}_3| + |\hat{A}_4|$ (1)
Par construction :
$\hat{C}$ et $\hat{A}_4$ sont alternes internes => $|\hat{C}| = |\hat{A}_4|$
$\hat{B}$ et $\hat{A}_3$ sont correspondants => $|\hat{B}| = |\hat{A}_3|$
En remplaçant $|\hat{A}_3|$ par $|\hat{B}|$ et $|\hat{A}_4|$ par $|\hat{C}|$ l'égalité (1) devient $|\hat{A}_2| = |\hat{B}| + |\hat{C}|$

c) Activité de découverte 3 :
~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.

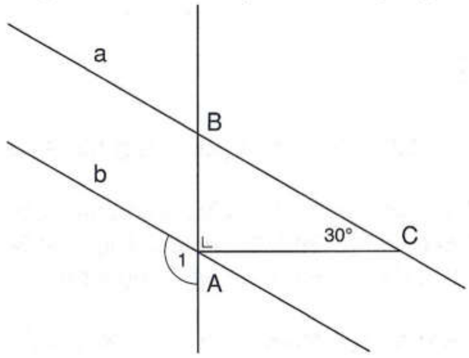
En utilisant les renseignements fournis par le dessin, détermine l'amplitude de l'angle $\widehat{B}_1$. Explique ton raisonnement.



Le triangle ABC est isocèle en B => $|\hat{A}| = |\widehat{C}|$
Or $|\widehat{C}|$ => $|\hat{A}| = 74°$
L'angle $\widehat{B}_1$ est un angle extérieur au triangle ABC
=> $|\widehat{B}_1| = |\hat{A}| + |\widehat{C}|$Or $|\widehat{C}| = |\hat{A}| = 74°$ => $|\widehat{B}_1| = 148°$

d) Activité de découverte 4 :
~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.

Sachant que a // b et en utilisant les renseignement fournis par le dessin, détermine l'amplitude de l'angle $\hat{A}_1$. Explique tout ton raisonnement.



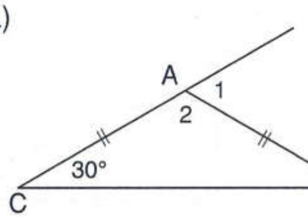
$\widehat{B}_1$ est un angle extérieur au triangle ABC.
=> $|\widehat{B}_1| = |\hat{A}_2| + |\widehat{C}|$
=> $|\widehat{B}_1| = 90° + 30°$
=> $|\widehat{B}_1| = 120°$
Les angles $\widehat{B}_1$ et $\hat{A}_1$ sont correspondants.
=> $|\widehat{B}_1| = |\hat{A}_1|$
Or $|\widehat{B}_1| = 120°$ => $|\hat{A}_1| = 120°$

10) Exercices complémentaires
****

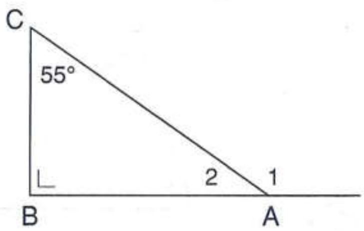
Série A :
~.~.~.~.~.

1) En utilisant les données fournies par chaque dessin, calcule l'amplitude de $\hat{A}_1$ en expliquant ton raisonnement.

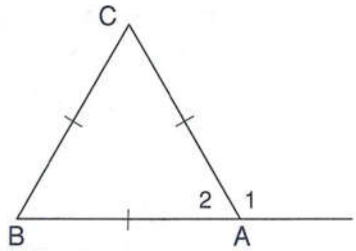
a)



b)



c)

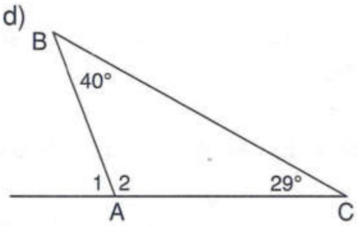


Le triangle ABC est isocèle en A ⇒ $|\widehat{B}| = |\widehat{C}|$
Or $|\widehat{C}| = 30°$ ⇒ $|\widehat{B}| = 30°$
L'angle $\widehat{A}_1$ est un angle extérieur au triangle ABC
⇒ $|\widehat{A}_1| = |\widehat{B}| + |\widehat{C}|$. Or $|\widehat{B}| = |\widehat{C}| = 30°$ ⇒ $|\widehat{A}_1| = 60°$

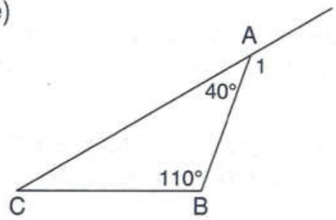
Le triangle ABC est rectangle en B ⇒
$|\widehat{A}_2| + |\widehat{C}| = 90°$
Or $|\widehat{C}| = 55°$ ⇒ $|\widehat{A}_2| = 90° - 55° = 35°$
L'angle $\widehat{A}_1$ est un angle extérieur au triangle ABC
⇒ $|\widehat{A}_1| = |\widehat{B}| + |\widehat{C}|$.
Or $|\widehat{B}| = 90°$ et $|\widehat{C}| = 55°$
⇒ $|\widehat{A}_1| = 145°$

Le triangle ABC est équilatéral ⇒
$|\widehat{A}_1|$ + ⇒
$|\widehat{A}_2| = |\widehat{B}| = |\widehat{C}| = 60°$
L'angle $\widehat{A}_1$ est un angle extérieur au triangle ABC
⇒ $|\widehat{A}_1| = |\widehat{B}| + |\widehat{C}|$.
Or $|\widehat{B}| = 40°$ et $|\widehat{C}| = 29°$
⇒ $|\widehat{A}_1| = 120°$

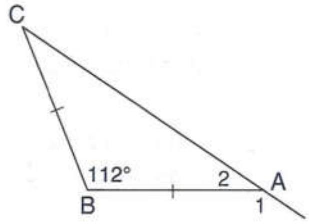
d)



e)



f)



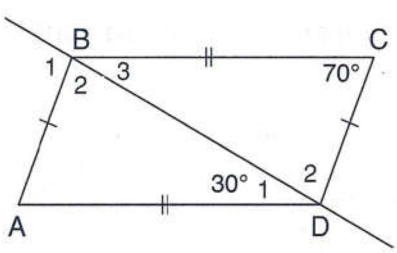
L'angles $\widehat{A}_1$ est un angle extérieur au triangle ABC $\Rightarrow$ | $\widehat{A}_1$ | = | $\widehat{B}$ | + | $\widehat{C}$ |. Or | $\widehat{B}$ | = | $\widehat{C}$ | = 60° $\Rightarrow$| $\widehat{A}_1$| = 120°

Dans le triangle ABC, on sait que | $\widehat{A}$ | + | $\widehat{B}$ | + | $\widehat{C}$ | = 180°. Or | $\widehat{A}$ | = 40° et | $\widehat{B}$ | = 110° $\Rightarrow$ | $\widehat{C}$ | = 180° - 40° - 110° = 30°
L'angle $\widehat{A}_1$ est un angle extérieur au triangle ABC $\Rightarrow$ | $\widehat{A}_1$ | = | $\widehat{B}$ | + | $\widehat{C}$ |.
Or | $\widehat{B}$ | = 110° et | $\widehat{C}$ | = 30° $\Rightarrow$ | $\widehat{A}_1$ | = 140°

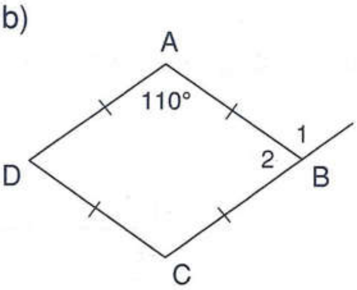
Le triangle ABC est isocèle en B $\Rightarrow$ | $\widehat{A}_2$ | = | $\widehat{C}$ | = 180° - 112° : 2 = 34°
Les angles $\widehat{A}_1$ et $\widehat{A}_2$ forment un angle plat $\Rightarrow$ | $\widehat{A}_1$ | + | $\widehat{A}_2$ | = 180°
Or | $\widehat{A}_2$ | = 34° $\Rightarrow$ | $\widehat{A}_1$ | = 146°

2) En utilisant les données fournies par chaque dessin, calcule l'amplitude de $\widehat{B}_1$ en expliquant ton raisonnement.

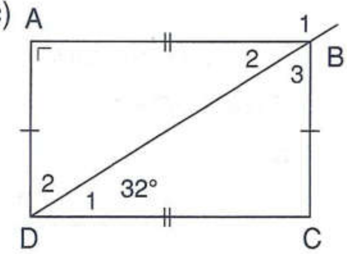
a)



b)



c)

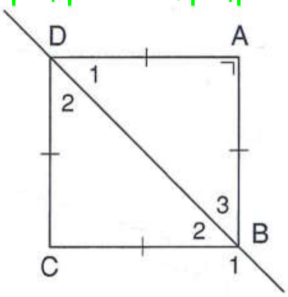


Dans le parallélogramme ABCD, les angles ooposés ont la même amplitude $\Rightarrow$ | $\widehat{A}$ | = | $\widehat{C}$ | = 70°. L'angle $\widehat{B}_1$ est un angle extérieur au triangle ABD $\Rightarrow$ | $\widehat{B}_1$ | = | $\widehat{A}$ | + | $\widehat{D}_1$ |. Or | $\widehat{A}$ | = 70° et | $\widehat{D}_1$ | = 30° $\Rightarrow$| $\widehat{B}_1$| = 100°

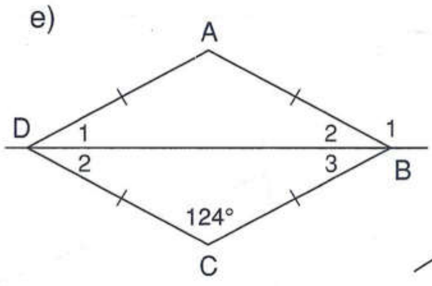
Les angles $\widehat{A}$ et $\widehat{B}_2$ sont des angles obtus à côtés patallèles $\Rightarrow$ | $\widehat{A}$ | = | $\widehat{B}_1$ |. Or | $\widehat{A}$ | = 110° $\Rightarrow$ | $\widehat{B}_1$ | = 110°

Les angles $\widehat{B}_2$ et $\widehat{D}_1$ sont des angles alternes internes $\Rightarrow$ | $\widehat{D}_1$ | = | $\widehat{B}_2$ |. Or | $\widehat{D}_1$ | = 32° $\Rightarrow$ | $\widehat{B}_2$ | = 32°
Les angles $\widehat{B}_2$ et $\widehat{B}_1$ sont supplémentaires $\Rightarrow$ | $\widehat{B}_1$ | + | $\widehat{B}_2$ | = 180°. Or | $\widehat{B}_2$ | = 32° $\Rightarrow$ | $\widehat{B}_1$ | = 180° - 32° = 148°

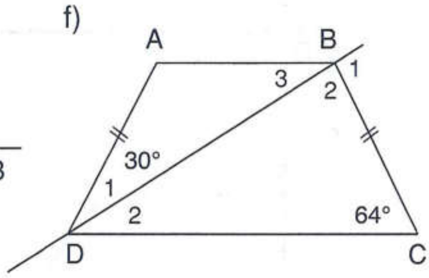
d)



e)



f)



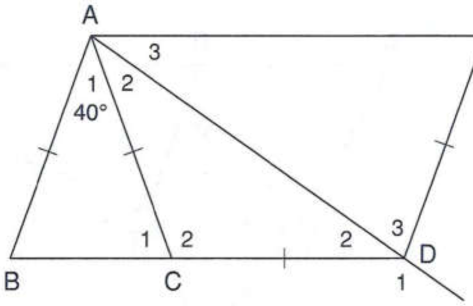
Le triangle DCB est rectangle isocèle en C $\Rightarrow$ | $\widehat{B}_2$ | = | $\widehat{D}_2$ | = 45° et | $\widehat{C}$ | = 90°. L'angle $\widehat{B}_1$ est un angle extérieur au triangle DCB $\Rightarrow$ | $\widehat{B}_1$ | = | $\widehat{C}$ | + | $\widehat{D}_2$ |. Or | $\widehat{C}$ | = 90° et | $\widehat{D}_2$ | = 45° $\Rightarrow$| $\widehat{B}_1$| = 135°

Les angles opposés d'un losange ont la même amplitude $\Rightarrow$ | $\widehat{A}$ | = | $\widehat{C}$ |. Or | $\widehat{C}$ | = 124° $\Rightarrow$ | $\widehat{A}$ | = 124°. Le triangle DAB est isocèle en A $\Rightarrow$ | $\widehat{B}_2$ | = | $\widehat{D}_1$ | = 180° - 124° : 2 = 28°. L'angle $\widehat{B}_1$ est un angle extérieur au triangle DAB $\Rightarrow$ | $\widehat{B}_1$ | = | $\widehat{A}$ | + | $\widehat{D}_1$ |. Or | $\widehat{A}$ | = 124° et

Le trapèze ABCD est isocèle $\Rightarrow$ | $\widehat{D}$ | = | $\widehat{C}$ |. Or | $\widehat{C}$ | = 64° $\Rightarrow$ | $\widehat{D}$ | = 64°. On sait que | $\widehat{D}$ | = | $\widehat{D}_1$ | +| $\widehat{D}_2$ |. Or | $\widehat{D}_1$ | = 30° $\Rightarrow$ | $\widehat{D}_2$ | = 34°. L'angle $\widehat{B}_1$ est un angle extérieur au triangle BDC $\Rightarrow$ | $\widehat{B}_1$ | = | $\widehat{C}$ | + | $\widehat{D}_2$ |. Or | $\widehat{C}$ | = 64° et | $\widehat{D}_2$ | = 34° $\Rightarrow$| $\widehat{B}_1$| = 98°

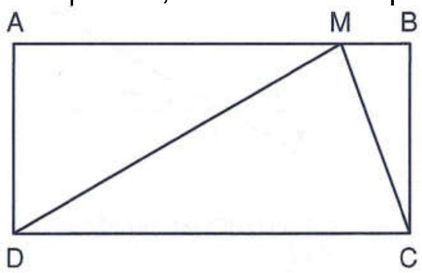
$| \widehat{D}_1 | = 28° \Rightarrow | \widehat{B}_1 | = 152°$

3) Sachant que ABDE est un parallélogramme et en utilisant les données fournies par le dessin, calcule l'amplitude des angles $\widehat{D}_1$ et $\widehat{E}$ en expliquant ton raisonnement.



Le triangle ABC est isocèle en A $\Rightarrow$ $| \widehat{B} | = | \widehat{C}_1 | = 70°$. Les angles $\widehat{C}_2$ et $\widehat{C}_1$ sont supplémentaires $\Rightarrow | \widehat{C}_1 | + | \widehat{C}_2 | = 180°$. Or $| \widehat{C}_1 | = 70° \Rightarrow | \widehat{C}_2 | = 180° - 70° = 110°$ Le triangle ACD est isocèle en C $\Rightarrow | \widehat{D}_2 | = | \widehat{A}_2 | = 180° - 110° : 2 = 35°$. Les angles $\widehat{D}_2$ et $\widehat{D}_1$ sont supplémentaires $\Rightarrow | \widehat{D}_1 | + | \widehat{D}_2 | = 180°$. Or $| \widehat{D}_2 | = 35° \Rightarrow | \widehat{D}_1 | = 180° - 35° = 145°$. Dans le parallélogramme AEDB, les angles ooposés ont la même amplitude $\Rightarrow | \widehat{E} | = | \widehat{B} | = 70°$.

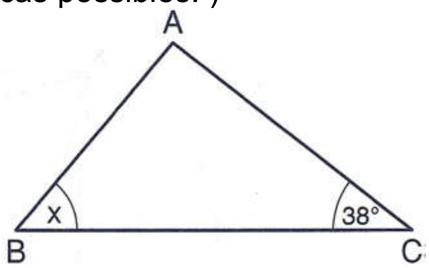
4) Si tu sais que le quadrilatère ABCD est un rectangle, que $| \widehat{DMC} | = 80°$ et que $| \widehat{BCM} | = 20°$, détermine l'amplitude de l'angle $\widehat{ADM}$.



$| \widehat{MCD} | = 70° \Rightarrow | \widehat{MDC} | = 30° \Rightarrow | \widehat{ADM} | = 60°$

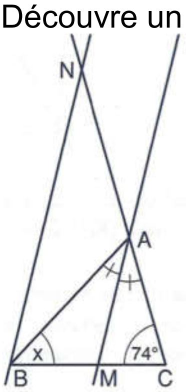
Série C :
~.~.~.~.~.

1) a) Calcule l'amplitude de l'angle $\widehat{BAC}$ du triangle ci-dessous, en fonction de x.
   b) Pour quelle valeur de x, le triangle ABC est-il isocèle en A ? en B , en C ?
   c) Pour quelles valeurs de x, le triangle ABC est-il rectangle ? (Tu envisages tous les cas possibles.)

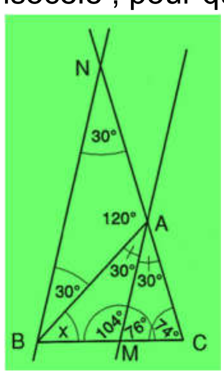


a) $| \widehat{BAC} | = 142° - x$
b) Isocèle en A si x = 38°
Isocèle en B si x = 104°
Isocèle en C si x = 71°
c) Rectangle en A si x = 52°
Rectangle en B si x = 90°

2) a) Si tu sais que la droite AM est la bissectrice de l'angle Â, calcule l'amplitude de tous les angles de la figure ci-dessous, pour x = 46°.
   b) Découvre un triangle isocèle ; pour quelle valeur de x, ce triangle est-il rectangle ?



MA // BN



a) Voir le dessin
b) $| \widehat{BNA} | = 30°$ et $| \widehat{NBA} | = 30° \Rightarrow$ le triangle NAB est isocèle en A. NBA sera rectangle isocèle en A si x = 16° (dans le triangle ABC : x = 180° - 90° - 74°)

11) Activité 8 : Angles et polygones

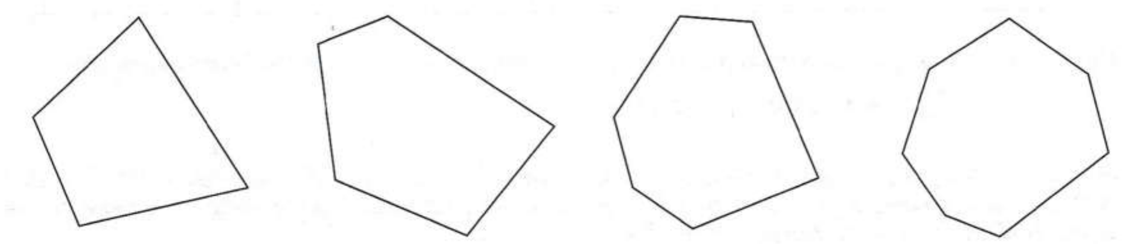
****

a) Activité de découverte 1 :

~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.

Détermine la somme des amplitudes des angles intérieurs des polygones suivants.

Quadrilatère Pentagone Hexagone Heptagone



Quadrilatère	Pentagone	Hexagone	Heptagone
4 côtés	**5 côtés**	**6 côtés**	**7 côtés**
(2 triangles)	**(3 triangles)**	**(4 triangles)**	**(5 triangles)**
2 . 180°	**3 . 180°**	**4 . 180°**	**5 . 180°**
360°	**540°**	**720°**	**900°**

b) Activité de découverte 2 :

~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.

Détermine la somme des amplitudes des angles intérieurs d'un polygone à :

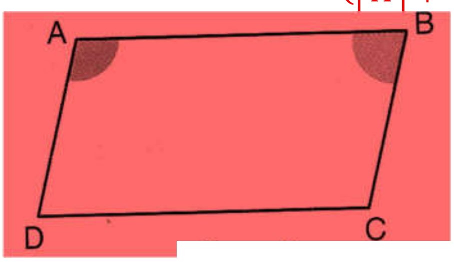
1) 10 côtés : **1440°**
2) 12 côtés : **1800°**
3) 20 côtés : **3240°**
4) n côtés : **(n - 2) . 180°**

<u>Propriétés des angles des quadrilatères particuliers</u>

<u>Parallélogramme</u>

Les angles consécutifs d'un parallélogramme sont supplémentaires.

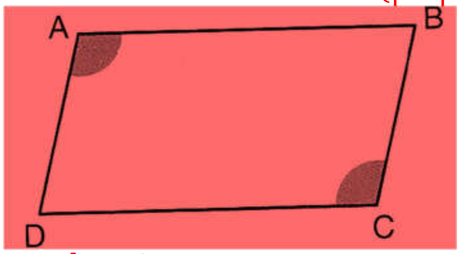
ABCD est un parallélogramme $\Rightarrow \begin{cases} |\hat{A}| + |\hat{B}| = 180° \\ |\hat{B}| + |\hat{C}| = 180° \\ |\hat{C}| + |\hat{D}| = 180° \\ |\hat{A}| + |\hat{D}| = 180° \end{cases}$



Les angles $\hat{A}$ et $\hat{B}$ sont deux angles consécutifs.

Les angles opposés d'un parallélogramme ont la même amplitude.

ABCD est un parallélogramme $\begin{cases} |\hat{A}| = |\hat{C}| \\ |\hat{D}| = |\hat{B}| \end{cases}$

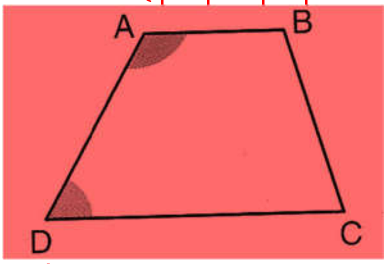


Les angles $\hat{A}$ et $\hat{C}$ sont deux angles opposés.

__Trapèze__

Les angles adjacents à un des côtés non parallèles d'un trapèze sont supplémentaires.

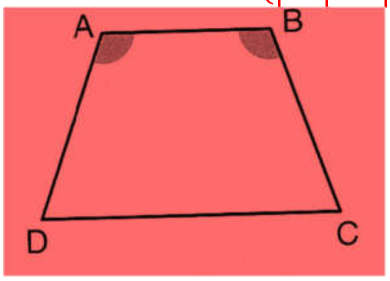
ABCD est un trapèze $\Rightarrow \begin{cases} |\hat{A}| + |\hat{D}| = 180° \\ |\hat{B}| + |\hat{C}| = 180° \end{cases}$ (AB // DC)



Les angles $\hat{A}$ et $\hat{D}$ sont les angles adjacents à [AD].

Les angles adjacents à une base d'un trapèze isocèle ont la même amplitude.

ABCD est un trapèze isocèle $\Rightarrow \begin{cases} |\hat{A}| = |\hat{B}| \\ |\hat{D}| = |\hat{C}| \end{cases}$ (AB // CD)

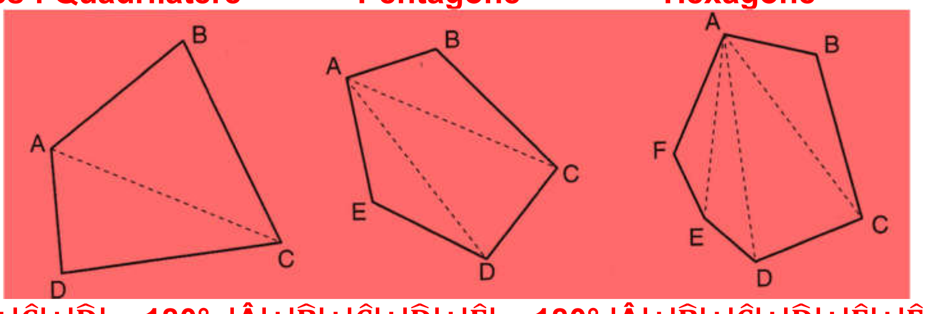


Les angles $\hat{A}$ et $\hat{B}$ sont les angles adjacents à la base [AB].

__Propriétés des angles des polygones__

La somme des amplitudes des angles d'un polygone à n côtés vaut (n - 2) . 180°

Exemples : Quadrilatère Pentagone Hexagone



|Â|+|B̂|+|Ĉ|+|D̂| = 180° = (4 - 2) .180° = 2 . 180° = 360°

|Â|+|B̂|+|Ĉ|+|D̂|+|Ê| = 180° = (5 - 2) . 180° = 3 . 180° = 540°

|Â|+|B̂|+|Ĉ|+|D̂|+|Ê|+|F̂| = 180° = (6 - 2) . 180° = 4 .180° = 720°

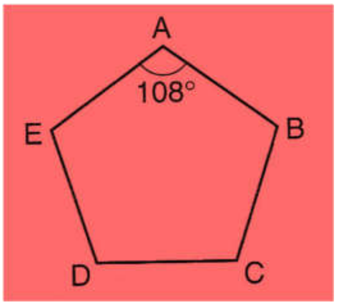
L'amplitude d'un angle d'un polygone régulier à n côtés vaut $\frac{(n-2).180°}{n}$.

Exemple : $|\hat{A}| = \frac{(5-2).180°}{5}$

$= \frac{3.180°}{5}$

$= \frac{540°}{5}$

$= 108°$



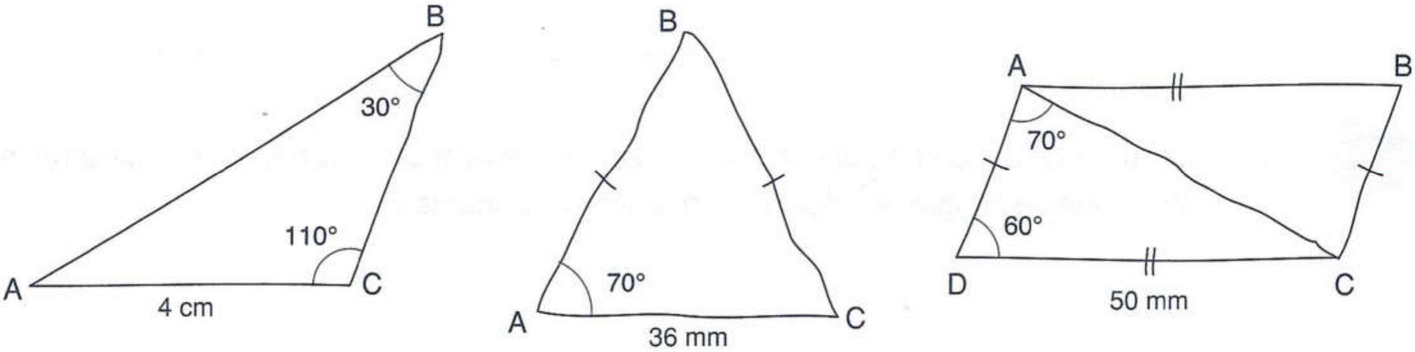
12) Activité 9 : Exercices de construction

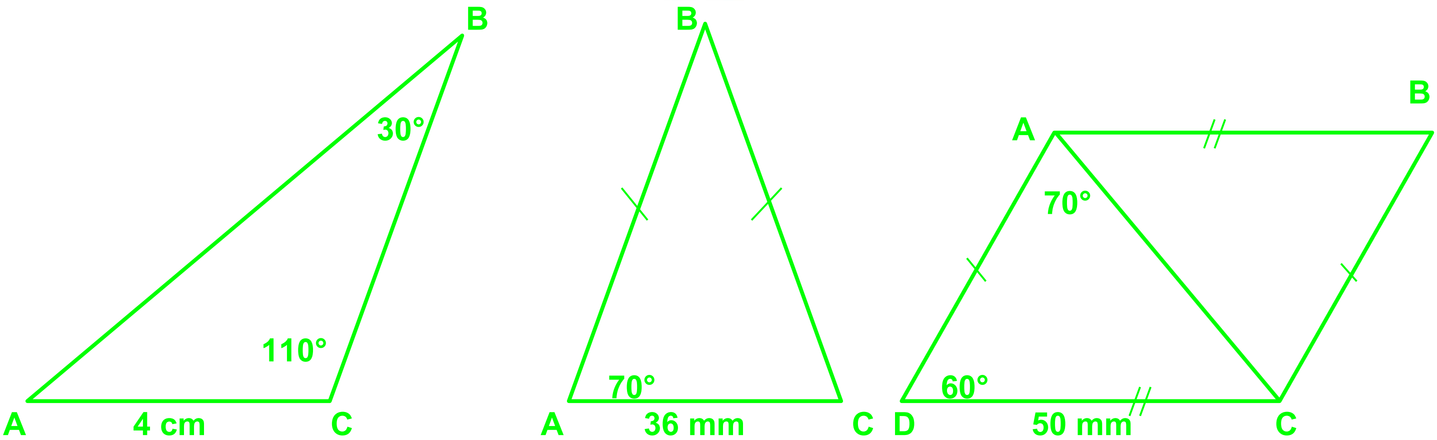
****

a) Activité de découverte 1 :

~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.

Les figures ci-dessous sont dessinées à main levée ; reproduis-les en vraie grandeur sur une feuille annexe.



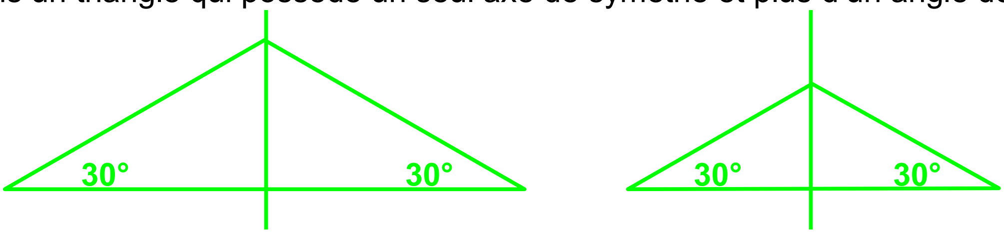


b) Activité de découverte 2 :

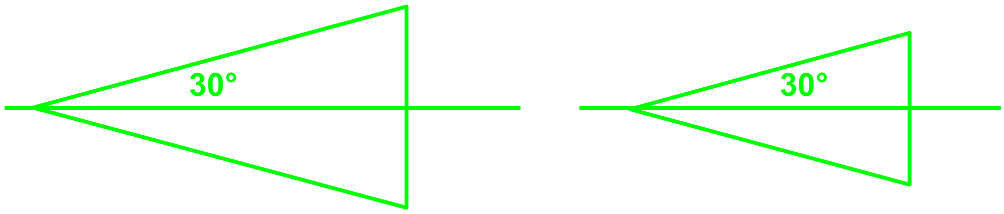
~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.

Parmi les problèmes de construction ci-dessous, détermine ceux pour lesquels la solution est unique. (Réponds sur une feuille annexe.)

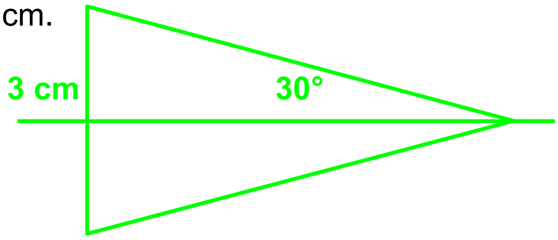
1) Construis un triangle qui possède un seul axe de symétrie et plus d'un angle de 30°.



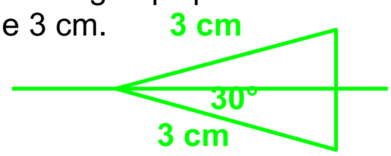
2) Construis un triangle qui possède un seul axe de symétrie et un seul angle de 30°.



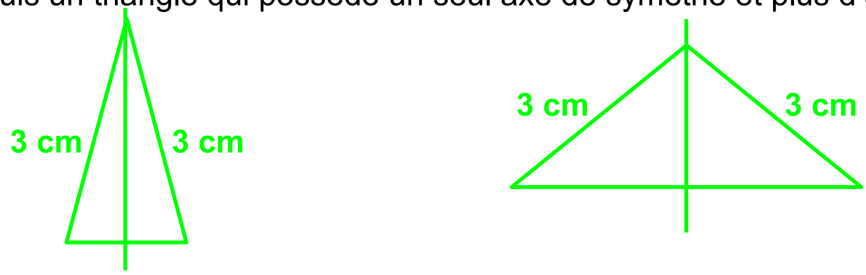
3) Construis un triangle qui possède un seul axe de symétrie, un seul angle de 30° et un seul côté de 3 cm.



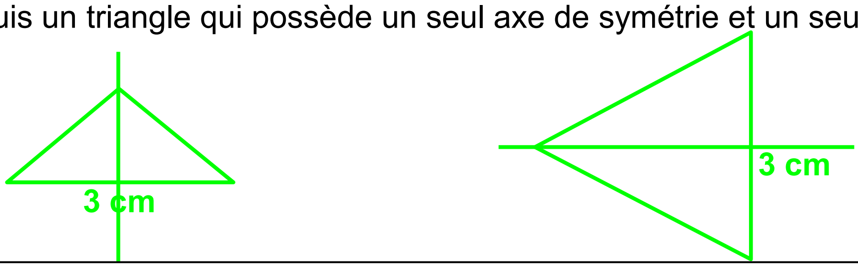
4) Construis un triangle qui possède un seul axe de symétrie, un seul angle de 30° et plus d'un côté de 3 cm.



5) Construis un triangle qui possède un seul axe de symétrie et plus d'un côté de 3 cm.



6) Construis un triangle qui possède un seul axe de symétrie et un seul côté de 3 cm.



Pavage du plan

Quels sont les polygones réguliers qui peuvent paver le plan ,

Il n'y en a que trois : le triangle équilatéral, le carré et l'hexagone régulier. Pourquoi ?

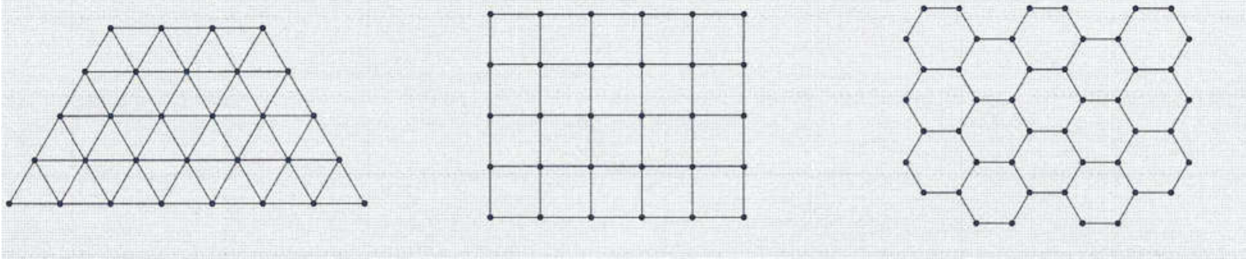
L'amplitude d'un angle intérieur d'un polygone régulier de n côtés vaut 180° . $\frac{n-2}{n}$.

On peut donc établir le tableau ci-dessous.

Nombre de côtés	3	4	5	6	7	8	9	10
Amplitude d'un angle	60°	90°	108°	120°	128,5°	135°	140°	144°

Remarque : L'amplitude d'un angle intérieur sera toujours inférieure à 180° car l'expression $\frac{n-2}{n}$ est toujours inférieur à 1.

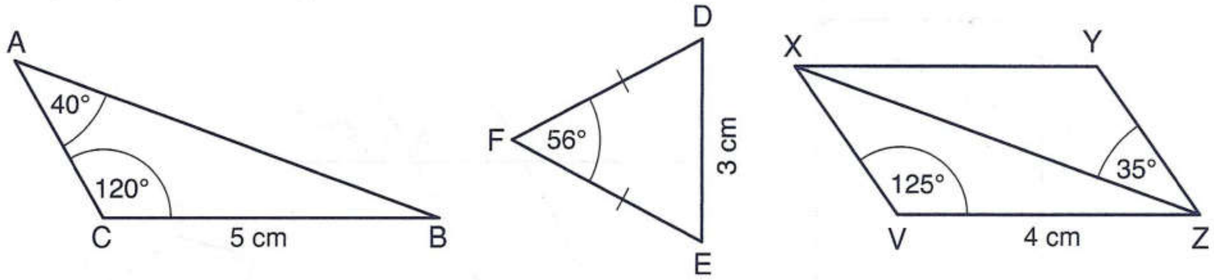
Pour qu'un polygone régulier pave le plan, il faut que l'amplitude d'un de ses angles intérieurs divise 360. Les seules valeurs possibles sont 60°, 90° et 120°, ce qui correspond respectivement au triangle équilatéral, au carré et à l'hexagone régulier.

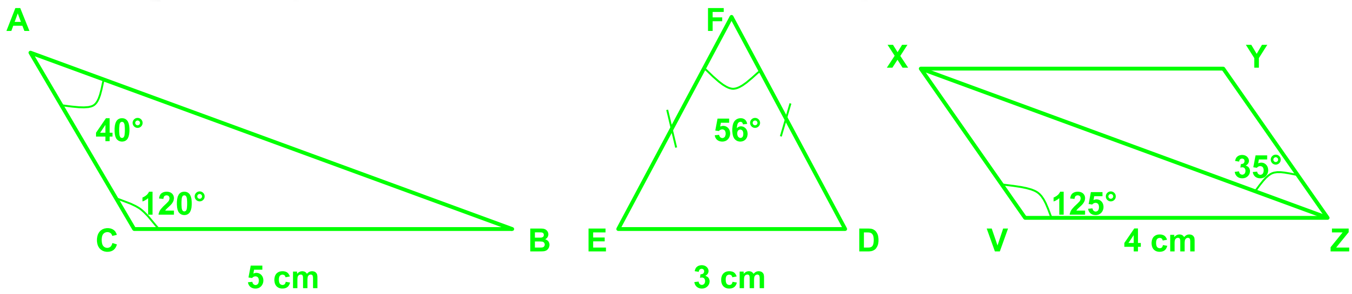


13) Exercices complémentaires
****

Série A :
~.~.~.~.~.

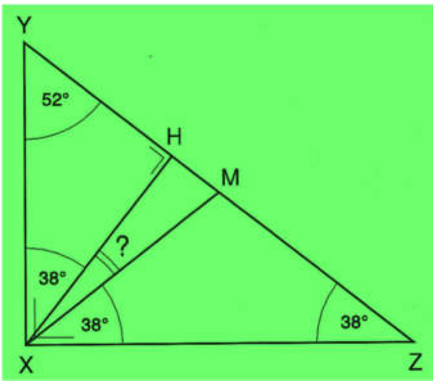
1) Reproduis les figures ci-dessous en vraie grandeur.





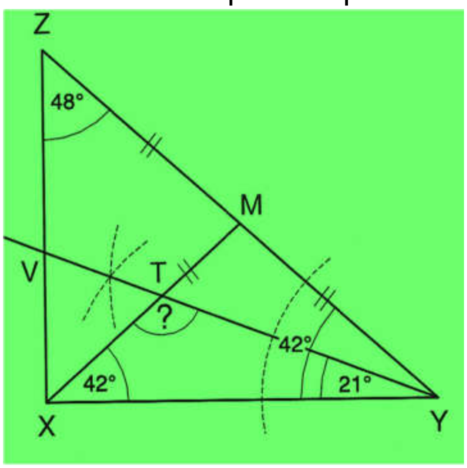
Série B :
~.~.~.~.~.

1) Construis un triangle XYZ rectangle en X si tu sais que | $\hat{Z}$ | = 38°. Trace la médiane [XM] et la hauteur [XH]. Calcule l'amplitude de l'angle | $\widehat{HXM}$ |.



| $\widehat{XYZ}$ | = 90° - 38° = 52°
| $\widehat{YXH}$ | = 90° - 52° = 38°
| $\widehat{MXZ}$ | = 38° car XMZ est isocèle (M milieu de l'hypoténuse [YZ] : | XM | = |MZ |.) Il s'agit du théorème de la médiane !
| $\widehat{HXM}$ | = 90° - 38° - 38° = 14°

2) Construis un triangle XYZ rectangle en X si tu sais que | $\hat{Z}$ | = 48°. Trace la médiane [XM] et la bissectrice issue de l'angle Y qui coupe [XZ] en V. La médiane et la bissectrice se coupent au point T. Calcule l'amplitude de l'angle | $\widehat{XTY}$ |.



| $\widehat{MYX}$ | = 90° - 48° = 42°
| $\widehat{TYX}$ | = 21°
| $\widehat{MXY}$ | = 42° (XMY triangle isocèle)
| $\widehat{XTY}$ | = 180° - 21° - 42° = 117°